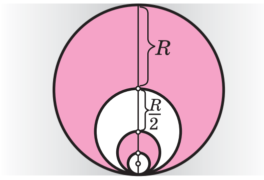
Г. Н. Солтан А. Е. Солтан

МАТЕМАТИКА
Алгебра и геометрия

Учебное пособие для 10 класса
учреждений, обеспечивающих получение
общего среднего образования,
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Под редакцией Н. А. Лиходеда

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь



Минск
«Народная асвета»
2006

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
С60

Рецензенты:
кафедра алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(*К. О. Ананченко*, д-р пед. наук, профессор);
учительница математики гимназии № 11 г. Минска *И. Г. Арефьева*

Солтан, Г. Н.
С60 **Математика:** Алгебра и геометрия: учеб. пособ. для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повыш. уровни) / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан; под ред. Н. А. Лиходеда. — Минск : Нар. асвета, 2006. — 303 с. : ил.
ISBN 985-12-1494-9.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

ISBN 985-12-1494-9

От авторов

Курс математики 10-го класса является продолжением и обобщением курсов алгебры и геометрии 7—9-х классов.

В курсе алгебры вы будете заниматься тождественными преобразованиями выражений, исследовать функции, овладевать умениями и навыками решения уравнений, неравенств и их систем, решать текстовые задачи.

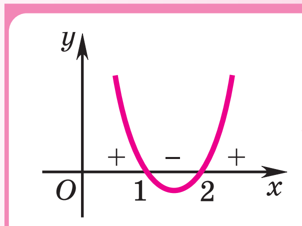
В курсе геометрии вы более основательно изучите вопросы тригонометрии, свойства правильных многоугольников, окружности и круга.

Теоретический материал и упражнения пособия разноуровневые. Более сложные задания, предназначенные для углубления ваших знаний и развития математических способностей, отмечены звездочкой.

Курсы алгебры и геометрии выступают как отдельные дисциплины, тесно связанные между собой. Основные темы курсов алгебры и геометрии 7—10-х классов обобщены в виде обзора методов решения задач и разнообразных заданий. Наличие таких значительных по объему глав для повторения позволит вам систематизировать математические знания, подготовиться к выпускным экзаменам по предмету, создать прочную основу для дальнейшего изучения математики.

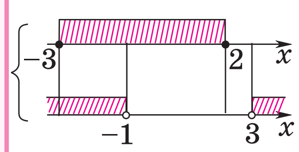
Желаем успехов!

Алгебра



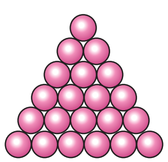
Глава I

Квадратичная функция. Квадратные неравенства



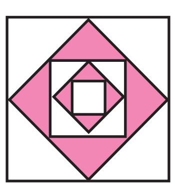
Глава II

Системы неравенств



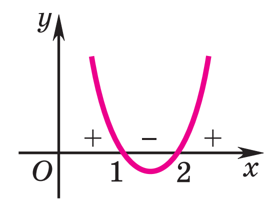
Глава III

Прогрессии. Корни степени *n*



Глава IV

Повторение курса алгебры



Глава I

Квадратичная функция. Квадратные неравенства

§ 1. Квадратичная функция. Квадратные неравенства

1. Квадратичная функция

Определение. **Квадратичной функцией называется функция, которая задается формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$.** Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ обладает следующими свойствами:

1. Областью определения функции является множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

2. Областью значений функции при $a > 0$ является промежуток $[y_0;\ +\infty)$, где $(x_0;\ y_0)$ — вершина параболы, $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$; а при $a < 0$ — промежуток $(-\infty;\ y_0]$ (рис. 1, *а*, *б*); y_0 можно находить по формуле $y_0 = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

3. Нули функции: при $D = b^2 - 4ac > 0$ — числа $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; если $D < 0$, то функция нулей не имеет; если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$.

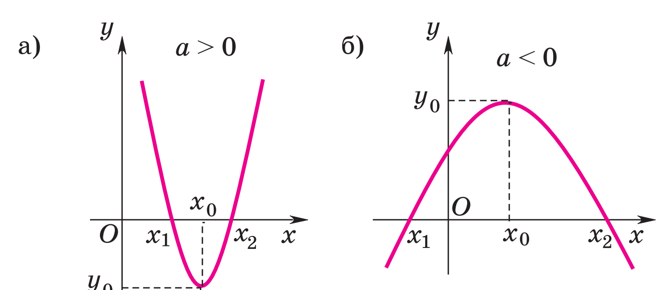


Рис. 1

4. Наименьшее значение $\frac{-b^2+4ac}{4a}$ функция принимает при $x = -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$; наибольшее значение $\frac{-b^2+4ac}{4a}$ функция принимает при $x = -\frac{b}{2a}$, если $a < 0$.

5. Функция при $a > 0$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ и убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$; функция при $a < 0$ возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

6. Функция четная, если $b = 0$; при $b \neq 0$ функция является ни четной, ни нечетной.

7. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$; прямая $x = -\frac{b}{2a}$ — ось симметрии параболы. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ — вниз.

Схема построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ может быть следующей:

1) Определить направление ветвей параболы.

2) Построить вершину параболы — точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{-b^2+4ac}{4a}$ (или $y_0 = y(x_0)$).

Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy, — ось симметрии параболы.

3) Найти нули функции (если они существуют) и построить точки пересечения параболы с осью Ox (если они есть).

4) Построить еще какие-либо точки параболы, симметричные относительно ее оси симметрии.

5) Провести через построенные точки параболу.

Пример 1. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 3$.

1) Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 1$.

2) Найдем координаты вершины параболы $(x_0; y_0)$: $x_0 = 4 : 2 = 2$, $y_0(x_0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Отметим точку $(2; -1)$ и через нее проведем ось симметрии параболы, прямую $x = 2$ (рис. 2, *а*).

3) Из уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ найдем нули функции:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

и построим точки $(1; 0)$ и $(3; 0)$.

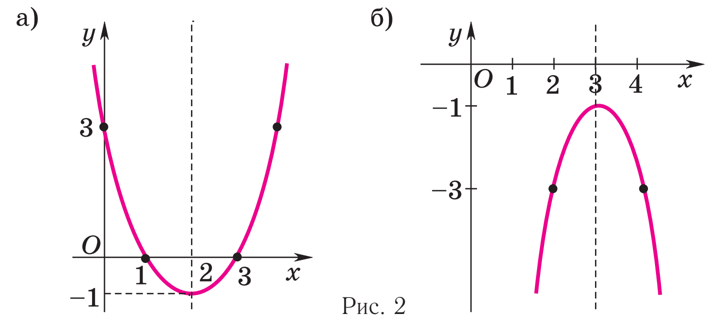


Рис. 2

4) Возьмем две точки на оси Ox, симметричные относительно точки $x = 2$, например точки $x = 0$ и $x = 4$.

Вычислим значение функции в этих точках:

$$y(0) = y(4) = 3.$$

Построим точки $(0; 3)$ и $(4; 3)$.

5) Проведем параболу через построенные точки.

Пример 2. Построить график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

1) Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -2$.

2) Вершина параболы имеет координаты: $x_0 = 12 : 4 = 3$, $y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1$. Построим точку $(3; -1)$ и через нее проведем ось симметрии параболы — прямую $x = 3$ (рис. 2, *б*).

3) Возьмем две точки на оси Ox, симметричные относительно точки $x = 3$, например точки $x = 2$ и $x = 4$.

Вычислим значение функции в этих точках:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

Построим точки $(2; -3)$ и $(4; -3)$.

4) Так как $y = -2(x-3)^2 - 1 < 0$ при любых x, то квадратичная функция не имеет нулей и парабола не пересекает ось Ox.

5) Проведем параболу через построенные точки.

Для более точного построения графика полезно найти еще несколько точек параболы.

2. Квадратные неравенства

Определение. **Квадратным неравенством называется неравенство вида: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$.**

Например, $x^2 - 3x + 2 < 0$, $2x^2 + 4x > 0$, $3x^2 \geqslant 4$; $x - 13x^2 \leqslant \leqslant -3x$ — квадратные неравенства.

Как известно, *решениями неравенства с одной переменной являются значения переменной, при которых оно преобразуется в верное числовое неравенство.*

Например, число 5 — решение неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$, т. к. $5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$, $8 > 0$.

Напомним, что ***решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.***

Отметим, что если два неравенства имеют одни и те же решения или не имеют решений, то их называют ***равносильными неравенствами***.

При решении квадратного неравенства используют свойства соответствующей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и особенности расположения относительно оси Ox ее графика в зависимости от коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Построим схематически (рис. 3, *а*) график функции $y = x^2 - 3x + 2$, для чего находим нули функции, решив уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$: $x = 1$, $x = 2$. Отметив на оси Ox промежутки знакопостоянства функции, заключаем, что $x^2 - 3x + 2 < 0$ при $1 < x < 2$.

Ответ: $(1; 2)$.

Пример 2. Решить неравенство $x^2 - 3x + 3 > 0$.

Для схематического построения графика функции $y = x^2 - 3x + 3$ ищем ее нули. Их нет, так как дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 3x + 3 = 0$ отрицателен: $D = -3$. Поскольку первый коэффициент квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 3$ положителен, то график функции $y = x^2 - 3x + 3$ расположен в верхней полуплоскости с границей Ox. Поэтому неравенство $x^2 - 3x + 3 > 0$ выполняется при любых действительных значениях x (рис. 3, *б*).

Ответ: $\boldsymbol{R}$.

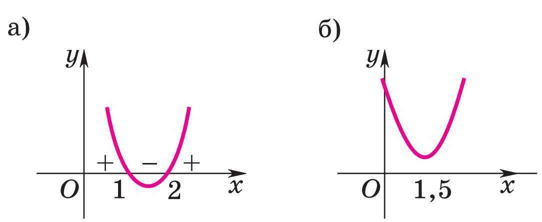


Рис. 3

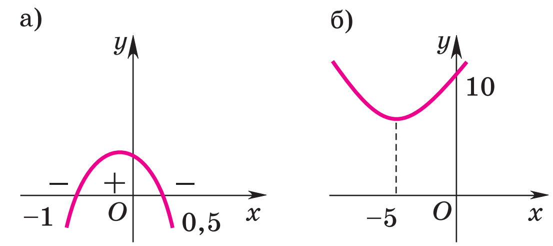


Рис. 4

Пример 3. Решить неравенство $-2x^2 - x + 1 \leqslant 0$.

Находим нули функции $y = -2x^2 - x + 1$:

$$-2x^2 - x + 1 = 0,$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 0{,}5.$$

Коэффициент при x^2 равен -2, поэтому ветви параболы $y = -2x^2 - x + 1$ направлены вниз. Изобразим схематически график функции (рис. 4, *а*) и выделим на оси Ox промежутки ее знакопостоянства. Как видим, множество решений исходного неравенства состоит из числовых промежутков $(-\infty; -1]$ и $[0{,}5; +\infty)$. Для объединения множеств используется специальный знак $\cup$. Тогда ответ можно записать в следующем виде.

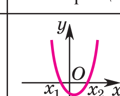
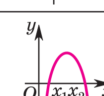
Ответ: $(-\infty; -1] \cup [0{,}5; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $0{,}1x^2 + x + 10 \leqslant 0$.

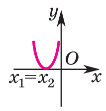
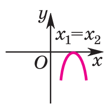
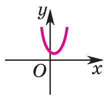
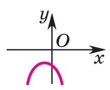
График квадратичной функции $y = 0{,}1x^2 + x + 10$ расположен в верхней полуплоскости с границей Ox, потому что она не имеет нулей и коэффициент $0{,}1$ при x^2 — положительный (рис. 4, *б*). Поскольку ни при каком значении x неравенство $0{,}1x^2 + x + 10 \leqslant 0$ не выполняется, то делаем вывод, что оно не имеет решений.

Ответ: неравенство не имеет решений.

Покажем рассмотренный способ решения квадратных неравенств в таблице:

D	a	Графическая иллюстрация	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$D = b^2 - 4ac > 0$ $x_1 < x_2$	$a > 0$		$(-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$
	$a < 0$		$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cap$ $\cap (x_2; +\infty)$

Продолжение

D	a	Графическая иллюстрация	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$
$D=0$ $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$,	$a>0$		$(-\infty;\ x_1)\cup$ $\cup\ (x_1;\ +\infty)$	Нет решений
	$a<0$		Нет решений	$(-\infty;\ x_1)\cup$ $\cup\ (x_1;\ +\infty)$
$D<0$	$a>0$		$(-\infty;\ +\infty)$	Нет решений
	$a<0$		Нет решений	$(-\infty;\ +\infty)$

Составьте таблицу решений неравенств $ax^2+bx+c\geqslant 0$ и $ax^2+bx+c\leqslant 0$ самостоятельно.

?

1. Что значит решить неравенство с одной переменной?
2. Что называется решением неравенства с одной переменной?
3. Что называется квадратным неравенством с одной переменной?
4. Какие неравенства называются равносильными?
5. Какие точки параболы играют существенную роль для отыскания промежутков, где функция $y=ax^2+bx+c$ принимает отрицательные или положительные значения?

Задания

Устные упражнения **1—9**.

1. Выясните, какие из следующих неравенств являются квадратными:

а) $x^2-4>0$; г) $x^2-1\leqslant 0$;
б) $4x-5<0$; д) $3x+4>0$;
в) $x^2-3x-5\leqslant 0$; е) $x^4-16>0$.

2. Сведите к квадратным следующие неравенства:

а) $x^2<3x+4$; в) $3x^2<x^2-5x+6$;
б) $3x^2-1>x$; г) $2x(x+1)<x+5$.

3. Найдите все значения a, при которых следующие неравенства сводятся к квадратным:

а) $ax^2+3x<x^2+4$; в) $a(x+1)<3x^2$;
б) $x(x+1)<ax^2$; г) $5x^2<ax+4$.

4. Принадлежит ли промежутку $[-7;\ -4]$ число: -10; $-6{,}5$; -3; 1? Принадлежит ли промежутку $(-4;\ 2)$ число: $3{,}5$; -1; $1{,}2$?

5. Укажите наибольшее целое число из промежутка: $[-1;\ 4]$; $(-\infty;\ 3)$; $(-\infty;\ -2{,}5)$.

6. Является ли число 0; $\sqrt{2}$; -3 решением неравенства:

а) $2x+3<0$; б) $x^2\leqslant 0$; в) $x^2>2$?

7. Решите неравенство:

а) $x+5>4$; в) $x-3\leqslant 2{,}5$;
б) $x-4<5$; г) $x+3\geqslant 2{,}5$.

8. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\frac{1}{2x-1}$; б) $\frac{1}{x^2+3}$; в) $\sqrt{x^2+1}$; г) $\sqrt{-x^2}$?

9. Функция задана формулой $y=x^2$. Укажите:

а) область определения функции;
б) область значений функции;
в) промежуток, в котором $y>0$;
г) промежуток, в котором функция возрастает; убывает.

10. Используя график функции $y=ax^2+bx+c$ (рис. 5, *а*, *б*, *в*), укажите, при каких значениях x эта функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значения, равные нулю.

11. На рисунке 5, *а*, *б*, *в* изображен график функции $y=ax^2+bx+c$. Определите знак коэффициента a; коэффициента c; дискриминанта D.

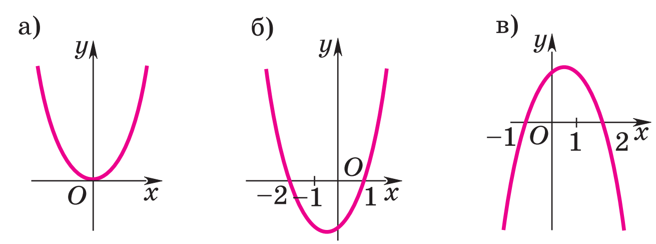


Рис. 5

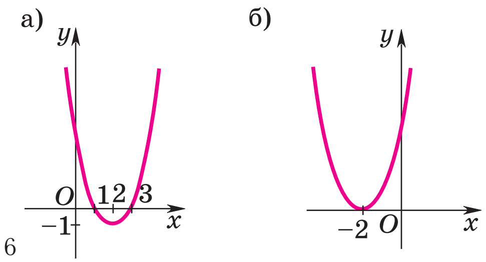


Рис. 6

12. Пользуясь рисунком 6, *а*, *б*, назовите значения переменной x, при которых функция $y = ax^2 + bx + c$: а) принимает положительные значения, отрицательные значения, значения, равные нулю; б) возрастает, убывает; в) принимает наибольшее, наименьшее значения.

13. Пользуясь рисунком 7, *а*, *б*, запишите решение неравенства:

а) $ax^2 + bx + c > 0$;　　в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.
б) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$;

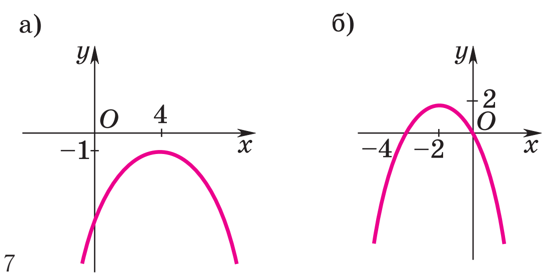


Рис. 7

14. Решите неравенство:

а) $x^2 - 6x + 8 > 0$;　　д) $9x^2 - 12x + 4 > 0$;
б) $x^2 + 6x - 8 < 0$;　　е) $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$;
в) $-x^2 - 2x + 15 \leqslant 0$;　　ж) $5x^2 - 4 > 0$;
г) $-5x^2 - 11x - 6 \geqslant 0$;　　з) $-2x^2 + 7x < 0$.

15. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 7x - 4 < 0$;　　в) $-3x^2 + 7x \geqslant 2$;
б) $x^2 - 30x + 5 > 0$;　　г) $25x^2 + 10x + 1 \geqslant 0$.

16. Решите неравенство:

а) $x^2 \leqslant 25$;　　д) $2x^2 \leqslant 3x$;
б) $x^2 > 10$;　　е) $7x > 2x^2$;
в) $0{,}02x^2 \leqslant 2$;　　ж) $2x^2 + 4 \geqslant 0$;
г) $0{,}5x^2 \geqslant 13$;　　з*) $x^2 < 2|x|$.

17. Найдите все значения переменной, при которых квадратный трехчлен:

а) $2x^2 - 7x + 6$ принимает положительные значения;
б) $-3x^2 - x - 12$ принимает отрицательные значения.

18. При каких значениях x выражение не имеет смысла:

а) $\sqrt{x^2 - 4x + 3}$;　　б) $\sqrt{5x^2 - 7x + 2}$?

19. Решите неравенство:

а) $x^2 + 10x + 27 > 0$;　　в*) $x^2 \geqslant x^4$;
б) $x^2 + 4x + 7 \leqslant 0$;　　г*) $x^2 \leqslant 16x^4$.

20. Запишите квадратное неравенство, решением которого является любое число из промежутка:

а) $(1; 4)$;　　б) $[0; 8]$;　　в*) $[-4; 4)$;　　г*) $\left(\frac{1}{5}; 10\right]$.

21. Запишите какое-нибудь квадратное неравенство, решением которого является любое действительное число.

22. Запишите какое-нибудь квадратное неравенство, решением которого является только одно определенное действительное число.

23. Запишите какое-нибудь квадратное неравенство, которое не имеет решений.

24. Найдите, если возможно, какое-нибудь квадратное неравенство, решениями которого являются только два определенных действительных числа.

25. Найдите все положительные решения неравенства:

а) $4x^2 - 27x - 7 > 0$;　　б) $-3x^2 + 17x + 6 < 0$.

26. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:
а) $x^2 + 8x \leqslant 20$;　　б) $x^2 - x \leqslant 6$?

27. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x - 1}$;　б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$.

28. Решите неравенство:

а) $6x^2 - 2x \leqslant 4x^2 + 5x + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

б) $3x^2 + 35x + \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \leqslant -x^2 + 6x + 2$;

в) $((0{,}2)^{-1}x + 1)(3x - 1) \geqslant ((0{,}5)^{-2}x - 1)(x + 2)$;
г) $(3x - 4^{-1})(x + 6) \leqslant (2^{-2}x - 6)(-x + 4^2)$.

29. Найдите все отрицательные решения неравенства:

а) $\frac{4x^2-5x}{4} - 1 \leqslant \frac{3+5x^2}{5}$; б) $\frac{7x^2-3x}{7} \geqslant 1 + \frac{2x^2+1}{2}$.

30. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = x^2 + 5x - 1716$; б) $y = 6x^2 - x - 3776$.

31. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{x+4}{\sqrt{-x^2+x+30}}$; б) $\frac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+5}$.

32. Верно ли при любом значении x неравенство:

а) $6x^2 - 10x + 7 > 0$;
б) $2x^2 + 7x + 1 > 10x - 1$;
в*) $4x^2 + 12x + 19^0 > -5^{-3}x^2 + 8x - 5^{-4}$?

33. Докажите, что:

а) $x^2 + 7x + 1 > -x^2 + 10x - 1$ при любом x;
б) $-2x^2 + 10x < 18 - 2x$ при $x \neq 3$.

34. Известно, что одна сторона прямоугольника на 6 см больше другой. Какой может быть эта сторона, если площадь прямоугольника меньше 40 см^2?

35. Известно, что одна сторона прямоугольника на 5 см больше другой. Какие размеры должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь была больше 36 см^2?

36. Площадь трапеции больше 19,22 дм^2, а ее высота вдвое меньше средней линии. Какую длину может иметь высота трапеции?

37. Докажите, что: а) при $q > 1$ решениями неравенства $x^2 - 2x + q > 0$ являются все значения $x \in \boldsymbol{R}$; б) при $q > 4$ решениями неравенства $x^2 + 4x + q > 0$ являются все значения $x \in \boldsymbol{R}$; в) при $q > 1$ неравенство $x^2 + 2x + q \leqslant 0$ не имеет решений; г) при $q > 4$ неравенство $x^2 - 4x + q < 0$ не имеет решений.

38. Сторона параллелограмма на 2 дм больше высоты, опущенной на нее. Какую длину может иметь эта сторона, если площадь параллелограмма больше 15 дм^2?

39. С самолета, находящегося на высоте больше 320 м, был сброшен груз. За какое время груз долетит до земли? Ускорение свободного падения возьмите равным 9,8 м/с^2.

40. Приведите пример квадратичной функции, наибольшее значение которой равно 0,81, и укажите промежутки ее знакопостоянства.

41*. Приведите пример функции, наименьшее значение которой равно 0,(428571), и укажите промежутки ее знакопостоянства.

42*. Найдите все значения t, для которых неравенство выполняется при всех $x \in \boldsymbol{R}$:

а) $x^2 - (t + 2)x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 2(t - 1)x - 2 < 0$.

43*. Решите неравенство относительно переменной x:

а) $2x^2 + px + 8 < 0$; б) $x^2 - 2x + p > 0$.

44*. Определите наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

45*. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 5 \geqslant 0.$$

46*. При каких значениях параметра корни каждого из квадратных уравнений отрицательны:

а) $x^2 - (k + 1)x + k + 4 = 0$; б) $y^2 + 2(m + 1)y + 9m - 5 = 0$?

§ 2. Метод интервалов

Решение неравенств методом интервалов

Отметим следующее свойство двучлена $x - a$: двучлен $x - a$ — отрицателен при всех x, находящихся на координатной прямой слева от числа a, и положителен при всех x, находящихся справа от a (рис. 8). Это свойство двучлена используется при определении знака функции, записанной в виде $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

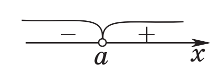


Рис. 8

Например, рассмотрим функцию $f(x) = (x + 4)(x - 2)(x - 10)$.

Областью определения этой функции является множество всех чисел. Нулями функции служат числа -4, 2, 10. Они разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty;\ -4)$, $(-4;\ 2)$, $(2;\ 10)$, $(10;\ +\infty)$.

Выражение $(x+4)(x-2)(x-10)$ представляет собой произведение трех множителей. Знак каждого из этих множителей в рассматриваемых промежутках указан в таблице:

	$(-\infty;\ -4)$	$(-4;\ 2)$	$(2;\ 10)$	$(10;\ +\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-10$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Отсюда находим, что $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ -4)$ или при $x\in(2;\ 10)$, а $f(x)>0$ при $x\in(-4;\ 2)$ или при $x\in(10;\ +\infty)$.

Заметим, что в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль ее знак изменяется.

Это свойство используется для решения неравенств вида:

$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)>0$, $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)<0$,

где x_1, x_2, ..., x_n — числа, являющиеся нулями функции $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Пример 1. Решить неравенство $x^2-3x+2>0$.

Найдем нули функции $f(x)=x^2-3x+2$: $x_1=1$, $x_2=2$. Тогда $f(x)=(x-1)(x-2)$. Отметим на координатной прямой (рис. 9) точки $x_1=1$ и $x_2=2$, разбивающие ее на три промежутка (интервала): $(-\infty;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (см. рис. 8). Определим знаки функции $f(x)$ на каждом из этих интервалов. Начнем с крайнего правого интервала $(2;\ +\infty)$. На нем оба множителя $x-1$ и $x-2$ положительны, поэтому положительно и их произведение. При переходе (справа налево) через точку $x=2$ множитель $x-2$ стал отрицателен и произведение $(x-1)(x-2)$ также отрицательно; при переходе через точку $x_1=1$ изменил знак с плюса на минус множитель $x-1$, и произведение $(x-1)(x-2)$ стало положительным. Результаты исследования знаков показываем схематически (рис. 10). Таким об-

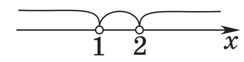


Рис. 9

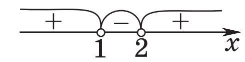


Рис. 10

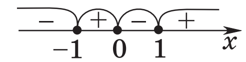


Рис. 11

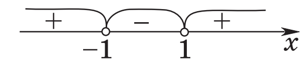


Рис. 12

разом, множеством решений неравенства $x^2-3x+2>0$ является объединение промежутков $(-\infty;\ 1)$ и $(2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

Рассмотренный способ решения неравенств называют *методом интервалов*.

Пример 2. Решить неравенство $x^3-x\geqslant 0$.

Разложим на множители многочлен: $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$. Нули функции $f(x)=x(x-1)(x+1)$ равны -1, 0 и 1. Отмечаем эти числа на координатной прямой и находим знак произведения $x(x-1)(x+1)$ на каждом из полученных интервалов (рис. 11).

Ответ: $[-1;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$.

Пример 3. При каких значениях x дробь $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ меньше 1?

Дробь $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ меньше 1, если $\frac{x^2+1}{x^2-1}-1<0$. Решаем неравенство:

$$\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1}<0,\quad \frac{2}{(x-1)(x+1)}<0.$$

Дробь с положительным числителем отрицательна, если ее знаменатель отрицателен. Методом интервалов находим, при каких значениях x $(x-1)(x+1)<0$ (рис. 12).

Ответ: $(-1;\ 1)$.

Пример 4. Решить неравенство $(x+3)(x-1)(x-4)^2(5-x)>0$. Умножив обе части неравенства на -1, имеем:

$$(x+3)(x-1)(x-4)^2(x-5)<0.$$

Выражение $(x-4)^2$ при любых значениях x неотрицательно, поэтому число 4 исключается из множества решений неравенства. Далее исследуем знаки выражения $(x-1)(x+3)(x-5)$ (рис. 13).

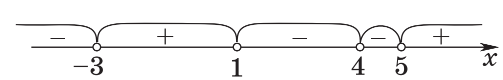


Рис. 13

Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ 4)\cup(4;\ 5)$.

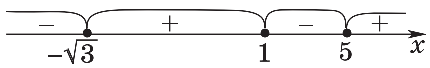


Рис. 14

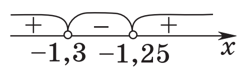


Рис. 15

Пример 5. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{(x+\sqrt{3})(x-1)(x-5)}.$$

Областью определения этой функции являются все те значения x, при которых подкоренное выражение неотрицательно, т. е. если $\left(x+\sqrt{3}\right)(x-1)(x-5) \geqslant 0$.

Нулями функции $f(x) = \left(x+\sqrt{3}\right)(x-1)(x-5)$ являются числа $-\sqrt{3}$, 1, 5. Они разбивают координатную прямую на промежутки $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; 1\right)$, (1; 5) и (5; $+\infty$). Найдем знак произведения $\left(x+\sqrt{3}\right)(x-1)(x-5)$ на каждом из промежутков (рис. 14).

Отсюда понятно, что $f(x) \geqslant 0$, если $x \in \left[-\sqrt{3}; 1\right]$ или если $x \in [5; +\infty)$.

Ответ: $\left[-\sqrt{3}; 1\right] \cup [5; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{x+0{,}5}{4x+5} < 4$.

Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{x+0{,}5}{4x+5} - 4 < 0, \quad \frac{x+0{,}5-4(4x+5)}{4x+5} < 0, \quad \frac{-15x-19{,}5}{4x+5} < 0,$$
$$\frac{-15(x+1{,}3)}{4(x+1{,}25)} < 0, \quad \frac{x+1{,}3}{x+1{,}25} > 0.$$

Поскольку знак дроби $\frac{x+1{,}3}{x+1{,}25}$ совпадает со знаком произведения $(x + 1{,}3)(x + 1{,}25)$, то неравенство $\frac{x+1{,}3}{x+1{,}25} > 0$ имеет такие же решения, как и неравенство $(x + 1{,}3)(x + 1{,}25) > 0$. Решаем последнее неравенство методом интервалов (рис. 15).

Ответ: $(-\infty; -1{,}3) \cup (-1{,}25; +\infty)$.

Задача 1*. Расстояние от деревни до станции по шоссе на 6 км больше, чем по тропинке. Один человек шел по шоссе со скоростью a км/ч, другой — по тропинке со скоростью 4 км/ч и пришел на станцию на один час раньше первого, хотя они и вышли одновременно. Найдите расстояние от деревни до станции по тропинке.

Решение. Обозначим искомое расстояние через x км, тогда расстояние от деревни до станции по шоссе равно $(x + 6)$ км. Время движения второго человека — $\frac{x}{4}$ ч, первого — $\frac{x+6}{a}$ ч. По условию задачи составляем уравнение: $\frac{x}{4} + 1 = \frac{x+6}{a}$. По смыслу задачи $a > 0$ и $x > 0$. Решаем уравнение относительно переменной x:

$$ax + 4a = 4x + 24,$$
$$ax - 4x = 24 - 4a,$$
$$(a - 4)\,x = 4\,(6 - a),$$
$$x = \frac{4(6-a)}{a-4}.$$

Найдем значения a, при которых $x > 0$. Для этого решаем неравенство $\frac{4(6-a)}{a-4} > 0$ методом интервалов (рис. 16, *а*): $\frac{a-6}{a-4} < 0$. Получим $a \in (4; 6)$. (Решите самостоятельно.)

Ответ: Расстояние от деревни до станции по тропинке равно $\frac{4(6-a)}{a-4}$ км, где a меньше 6 км/ч, но больше 4 км/ч.

а) б)

Рис. 16

*Отметим, что неравенство вида $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (1)

с неизвестным x, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены, называется *рациональным* неравенством.

Любое решение неравенства (1) будет решением неравенства

$$A(x) \cdot B(x) > 0, \qquad (2)$$

а любое решение неравенства (2) будет решением неравенства (1), т. е. неравенства (1) и (2) равносильны: $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$.*

Пример 7. Решить неравенство $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$.

Решение.

$$\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2x-4}{x(4-x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-4)} < 0 \text{ (рис. 16, } б\text{)}.$$

Ответ: $(-1; 0) \cup (2; 4)$.

Заметим, что если при решении неравенства вместо приведения к общему знаменателю умножить неравенство на $x(4 - x)$, то получится неравенство $2x^2 - 2x - 4 < 0$, не равносильное исходному. (Почему?)

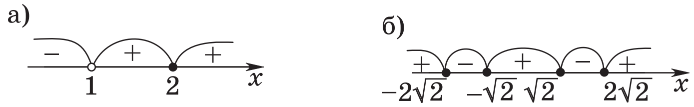


Рис. 17

Пример 8*. Решить неравенство $x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}$.

Решение. Приводим неравенство к виду

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

Используем метод интервалов. (Графическую иллюстрацию см. на рис. 17, *а*.)

Ответ: $(-\infty; 1) \cup 2$.

Пример 9*. Решить неравенство

$$x^4 - 10x^2 + 16 \geqslant 0.$$

Решение. $x^4 - 10x^2 + 16 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-8)(x^2-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 2\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2}) \geqslant 0$ (рис. 17, *б*).

Ответ: $\left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; \infty\right)$.

Задача 2*. Велосипедист отправляется из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в B, он едет обратно с той же скоростью, но через 1 ч после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость v велосипедиста, если известно, что на обратном пути от B до A он потратил времени не более, чем на путь от A до B?

Решение.

Пусть x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста. Из условия задачи следует, что $t_{AB} = \frac{60}{x}$ ч, а $t_{BA} = \frac{60-x}{x+4} + 1\frac{1}{3}$ ч (рис. 18).

Так как $t_{BA} \leqslant t_{AB}$, то $\frac{60-x}{x+4} + 1\frac{1}{3} \leqslant \frac{60}{x}$, то $x > 0$.

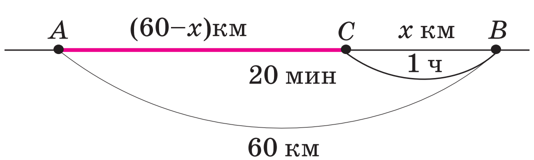


Рис. 11

Решая это неравенство, получим

$$\frac{x^2+16x-720}{x(x+4)} \leqslant 0, \ \frac{(x-20)(x+36)}{x(x+4)} \leqslant 0,$$

$$0 < x \leqslant 20.$$

Ответ: $0 < v \leqslant 20$ км/ч.

Пример 10*. Решить неравенство $\quad x^2 + 2x + a > 0 \quad (1)$ для каждого значения параметра a.

Решение. Вычислим дискриминант трехчлена $x^2 + 2x + a$ (учитывая, что второй коэффициент — четное число). $D = 1 - a$.

Если $D = 0$, то есть если $a = 1$, неравенство (1) примет вид: $(x+1)^2 > 0$. Оно верно при любых действительных значениях x, кроме $x = -1$.

Если $D < 0$, то есть $1 - a < 0$, $a > 1$, неравенство (1) справедливо при любых действительных значениях x (объясните почему).

Если $D < 0$, то есть если $a < 1$, трехчлен $x^2 + 2x + a$ имеет два корня $x_1 = -1 - \sqrt{1-a}$ и $x_2 = -1 + \sqrt{1-a}$ и решением неравенства служит объединение промежутков $\left(-\infty; -1 - \sqrt{1-a}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{1-a}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -1 - \sqrt{1-a}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{1-a}; +\infty\right)$ при $a < 1$, $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ при $a = 1$, $(-\infty; +\infty)$ при $a > 1$.

?
1. В чем заключается метод интервалов решения неравенств?
2. Как можно решать неравенства второй степени?
3. Что называется рациональным неравенством?
4. Как можно решать рациональные неравенства?

Задания

Устные упражнения **47—52**.

47. Являются ли числа 2; 0,2 решениями неравенств: $2x - 1 < 4$; $4x + 5 > 3$?

48. Равносильны ли неравенства:

а) $5x > 20$ и $x < -4$; б) $x - 3 > -3$ и $x > 0$?

49. При каких значениях x равна нулю дробь: $\frac{x^2-2x}{x-2}$; $\frac{x^2-4}{x+2}$?

50. В каких промежутках $f(x) < 0$, если:

а) $f(x) = 1 - 2x$; б) $f(x) = 4x - 2$?

51. При каких значениях x функция: а) $f(x) = x^4$; б) $f(x) = x^3$ принимает положительные значения?

52. При каких значениях x справедливо равенство $\sqrt{(x-5)^2} = x - 5$?

53. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{5} < -2$; б) $-\frac{x}{2} > 10$.

54. Решите неравенство:

а) $x^2 < 1$; б) $x^2 > -1$; в) $x^2 < x$; г) $x^2 > x$.

55. Решите неравенство:

а) $x^2 - 3x > 4$; б) $x^2 + 3x > -4$; в) $x(x - 1) \geqslant 2(x - 1)$.

56. Решите неравенство:

а) $(x + 2)(x + 5)(x - 1)(x + 4) > 0$;
б) $(x - 1)(x + 3)(x - 2)(x^2 + 1) \leqslant 0$;
в) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) \leqslant 0$;
г) $(y^2 + 2y - 3)(-2y^2 + 5y - 2) \leqslant 0$.

57. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 169}$; б) $y = \sqrt{225 - x^2}$.

58. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\frac{\sqrt{17 - x^2}}{x}$; б) $\sqrt{\frac{x^2 - 15}{x}}$?

59. Решите неравенство:

а) $6x^2 - x - 2 \geqslant 0$; в) $2(x + 2)^2 \geqslant 2x + 3{,}5$;
б) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$; г) $x^2 + 4x < 0{,}5x^2 + 5{,}5$.

60. Запишите какой-либо промежуток, ни одно из чисел которого не является решением неравенства:

а) $(x - 3)^2 < 16$; б) $(3 - x)^2 < 4$.

61. а) Найдите все целые значения переменной x, при которых выражение $\sqrt{2 - x - x^2}$ имеет смысл.

б) Найдите все целые значения переменной x, при которых выражение $\frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x - 2}}$ не имеет смысла.

62. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства:

а) $x(x + 5) - 2 > 4x$; б) $11 - (x + 1)^2 \geqslant x$.

63. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства:

а) $x(x + 5) \leqslant 2(x^2 + 2)$; б) $(x + 4)(x+5) \leqslant x + 5$.

64. Решите неравенство:

а) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$; г) $\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 5x - 6} < 0$;
б) $x^2 + 5x - 24 > 0$; д*) $\frac{27}{x^2} \geqslant x$;
в) $\frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 - 6x + 5} > 0$; е*) $|x| > x^2 + x$.

65. Решите неравенство:

а) $\frac{-3x^2 + 4x - 5}{2x + 3} > 0$; в*) $\frac{3x}{x} - 4 \leqslant \frac{1}{x-1}$;
б*) $\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + x + 1} < 1$; г*) $\frac{3x - 1}{3x + 1} + \frac{x - 3}{x + 3} \geqslant 2$.

66. При каких значениях x дробь не меньше 3:

а) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$; б) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$?

67. Решите неравенство:

а) $x + 2x^{-1} > 3$; б) $x - 3x^{-1} < 2$.

68. а) Найдите наименьшее решение неравенства $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \geqslant \frac{4}{3}$.

б) Найдите наибольшее решение неравенства $\frac{7x - 5}{x + 1} \geqslant x$.

69. Найдите арифметический квадратный корень из произведения всех целочисленных решений неравенства:

а) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4} < 0$; б) $\frac{10 - x}{5 + x^2} > \frac{1}{2}$.

70. Равносильны ли неравенства:

а) $x^2 + 7x + 10 > 0$ и $(x + 2)(x + 5) > 0$;
б) $x^2 - 7x + 10 < 0$ и $(x - 2)(x - 5) < 0$;
в) $x(x - 15) \leqslant 0$ и $3x - 45 \leqslant 0$;
г) $\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{2}{9}\right) > 0$ и $\left(\frac{1}{7} - x\right)\left(\frac{2}{9} + x\right) > 0$;
д) $\frac{x - 5}{x + 7} < 0$ и $(x + 7)(x - 5) < 0$;
е) $\frac{6x + 1}{11 - x} \geqslant 0$ и $\frac{1 - 6x}{x - 11} \leqslant 0$;

ж) $\frac{x-4}{x+2} > 1$ и $\frac{10}{x+2} < 0$;
з) $(x^2-16)(x+13) \geqslant 0$ и $(x-4)(x^2+17x+52) \geqslant 0$;
и*) $\sqrt{x} < 1$ и $\frac{1}{x} < 1$;
к*) $|2x-8| \leqslant 6$ и $x^2 \leqslant 49$?

71*. Решите неравенство:

а) $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$;
б) $x^4 - 8x^2 + 15 \leqslant 0$;
в) $x \geqslant 2 - \frac{1}{x-4}$;
г) $\frac{x+7}{x-2} > x - 1$.

72*. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x + (0,(3))^{-1} > 0$;
б) $x^2 + (0,(1))^{-1} < 6x$.

73*. Решите неравенство:

а) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x} - 2$;
б) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0$;
в) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} \leqslant \frac{6}{x-1}$;
г) $\frac{x^{-1}}{x^2+3x+2} \geqslant \frac{x^{-1}}{x^2+7x+12}$.

74*. Решите неравенство:

а) $|x+3|(x-1) > 0$;
б) $(x-4)|x+4| < 0$;
в) $|2x-1| - |x-2| \geqslant 4$;
г) $|x| + |x+5| < 5$;
д) $(x^3-1)|x-2| \leqslant 0$;
е) $(x^3+8)|x+7| \geqslant 0$.

75. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x-4} < 1$;
б) $\sqrt{-x}\,(x-1) > 0$;
в) $\sqrt{x} > 3,5$;
г*) $\sqrt{x^2+7} > |x+1|$.

76. Найдите наименьшее решение неравенства:
а) $(x-1)\sqrt{x-1} \geqslant 0$; б) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x} \geqslant 0$; в) $\frac{x+3}{\sqrt{11-x}} \geqslant 0$.

77. Найдите середину промежутка, на котором выполняется неравенство:

а) $(x-3)(x+2)\sqrt{x-2} \leqslant 0$; б) $(x-3)\sqrt{3-\sqrt{x}} \geqslant 0$.

78*. Найдите длину промежутка, на котором выполняется неравенство:

а) $x - 4\sqrt{x} - 5 \leqslant 0$; б) $(x^2-1)\sqrt{-x} \leqslant 0$.

79*. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{144-9x^2}}$;
б) $y = \frac{\sqrt{x^2-x-42}}{x-11}$;
в) $y = \frac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$;
г) $y = \frac{x-3}{\sqrt{-x^2+x+30}}$.

80*. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} \leqslant 0$;
б) $\frac{x^2+x}{x^2+x-2} > 0$;
в) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \leqslant 0$;
г) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$.

81. Известно, что один из катетов прямоугольного треугольника вдвое длиннее другого. Каким наименьшим целым значением выражается длина большего катета, если известно, что гипотенуза этого прямоугольного треугольника не больше 13 см?

82. Длина прямоугольника на 4 м больше его ширины. Найдите наибольшее целое значение длины прямоугольника, если известно, что его площадь не больше 72 м^2.

83. Найдите меньшее из двух натуральных чисел, сумма которых равна 17, а сумма их квадратов не больше 185.

84. Известно, что произведение двух последовательных чисел больше их суммы не более чем на 11. Найдите меньшее из этих чисел.

85*. Решите каждое из неравенств относительно x:

а) $kx^2 - x - 1 > 0$;
б) $kx^2 + 12x - 5 < 0$;
в) $2x^2 + kx + 3 < 0$;
г) $x^2 - 2x + k > 0$.

Повторение главы I

Исторические сведения

Зачатки тех сведений, которые относятся в настоящее время к алгебре, имеются в исторических памятниках отдаленных для нас времен. Наиболее обширным по количеству материала является египетский папирус Райнда, или как его иначе называют, папирус Ахмеса (считают, что он был составлен египетским писцом Ахмесом около XX в. до н. э.), который хранится в Лондоне.

Греческие ученые в более поздние времена (Пифагор — VI в. до н. э., Евклид IV—III вв. до н. э.) достигли значительных резуль-

Мухаммед бен Мусса аль-Хорезми (787 — ок. 850)

татов в области алгебры, хотя занимались преимущественно геометрией.

Около 820 г. н. э. ученый Мухаммед бен Мусса аль-Хорезми (Мухаммед — сын Муссы из Хорезма; ныне Узбекистан) написал книгу «Ал-джебр ва-л-мукабала», которую посвятил составлению и решению уравнений первой и второй степени. В этой книге нет еще буквенной символики, все рассуждения записываются словами (риторическая алгебра), но впервые идет речь о перенесении отрицательных членов уравнения из одной части в другую (что и означает «ал-джебр») и о приведении подобных членов уравнения, имеющих противоположные знаки (что означает «мукабала»). От слова *ал-джебр* и получила свое название наука алгебра; от слова *аль-Хорезми* произошел термин «алгоритм».

В дальнейшем алгебра обрела свое самостоятельное развитие. Прежде всего это выразилось во многих исследованиях решений уравнений (XV—XVIII вв.), во введении новых областей чисел (признании отрицательных чисел в XVII в., иррациональных — в XVIII в.). Введение многих областей алгебры было подсказано решением уравнений, неравенств и геометрических задач.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется квадратичной функцией и какие ее свойства вы знаете?

2. Как называется график квадратичной функции и какие способы его построения вы знаете? Приведите примеры.

3. Приведите пример использования свойств квадратичной функции для нахождения наибольшего или наименьшего значения переменной величины.

4. Какое неравенство называется квадратным неравенством?

5. Как можно решить квадратное неравенство с применением свойств квадратичной функции? Приведите примеры.

6. В чем суть метода интервалов решения неравенств? Покажите на примерах решение неравенств методом интервалов.

7. Какие уравнения называются равносильными? Приведите примеры равносильных и неравносильных уравнений.

8. Какие неравенства называются равносильными? Приведите примеры равносильных и неравносильных неравенств.

Задания

86. Сравните с нулем: а) $4 + m^2$; б) $-4 - m^2$; в) $(4 - m)^2$.

87. Решите неравенство:

а) $\frac{2x^2-7x+7}{x^2-1} < 0$; б) $\frac{x^2+x+1}{x^2-4} > 0$.

88. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 19) определите знаки коэффициентов a, b и c.

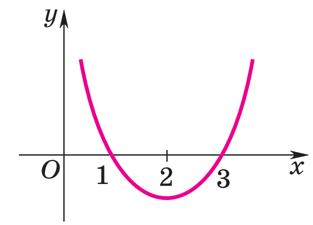


Рис. 19

89. Одна сторона прямоугольника на 7 см больше другой. Какой может быть эта сторона, если площадь прямоугольника меньше 60 см^2?

90. Знаменатель дроби больше квадрата ее числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то дробь будет больше 0,25. Что это за дробь?

91. Решите неравенство:

а) $x^2 - 9x + 14 < 0$; в) $-x^2 + 4x - 4 < 0$;
б) $3x^2 - 5x + 2 > 0$; г) $3x^2 - 2x + 5 \geqslant 0$.

92. Решите неравенство:

а) $x^2 + 6x - 55 \geqslant 0$; в) $-2c^2 + 9c + 5 > 0$;
б) $t^2 - 26t + 169 < 0$; г) $3y^2 - 10y - 8 \leqslant 0$.

93. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{121-9x^2}$; в) $y = \sqrt{-x^2-4x+32}$;
б) $y = \sqrt{x^2+2x-63}$; г) $y = \sqrt{x(x+16)+64}$.

94. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{14-x^2}$; в) $\sqrt{6x^2-19x+15}$;
б) $\sqrt{x^2-15x+56}$; г) $\sqrt{13x-x^2}$.

95. Решите неравенство:

а) $\frac{12-x}{x+13} > 0$; б) $\frac{6-5x}{x+0,5} < 0$.

96*. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\frac{x+2}{3-x} > (0,5)^{-1}$; б) $\frac{1}{x-3} \leqslant -(0,1)^{-1}$.

97*. Решите неравенство:

а) $x^3 - 8x^2 - x + 8 > 0$; б) $3x^3 - x^2 + 18x - 6 < 0$.

98*. Докажите неравенство:

а) $x^4 - x^3 - x + 1 \geqslant 0$; б) $x^4 - 2x^3 - 8x + 16 \geqslant 0$.

99*. Докажите, что при любых положительных значениях x и y выполняется неравенство

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 - 4xy^{-1} - 4x^{-1}y + 5 > 0.$$

100*. Расстояние между городами A и B равно 100 км. Из города A в город B отправляются одновременно два велосипедиста. Скорость одного из велосипедистов на 10 км/ч больше скорости другого велосипедиста, но он делает остановку в пути на 50 мин. В каких пределах должна быть скорость этого велосипедиста, чтобы он приехал в город B не позже второго велосипедиста?

101*. Решите уравнение относительно переменной x:

$$(a + b - 2c)\,x^2 + (c + b - 2a)\,x + a + c = 2b.$$

102*. При каких значениях p неравенство $\frac{x^2+px-2}{x^2-x+1} < 2$ верно при любых $x \in \boldsymbol{R}$?

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. На рисунке 20 изображен график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя рисунок, запишите решение неравенства $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$.

2. Решите неравенство:

а) $4x^2 + 4x - 15 > 0$; в) $(x + 3)(x - 1)(10 - x) \geqslant 0$;

б) $x^2 - 49 < 0$; г) $\frac{x-4{,}1}{x+6{,}9} < 2$.

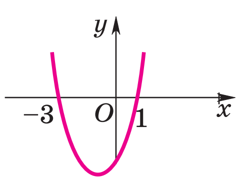


Рис. 20

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

$$\sqrt{|x|-10}\,?$$

4. Длина прямоугольника на 2 м больше ширины. Какую ширину должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей, а периметр не превышал 24 м?

5*. Решите неравенство:

$$\frac{2}{x+\sqrt{3}} > \frac{3}{x-\sqrt{3}}.$$

Вариант 2*

1. На сколько сантиметров нужно уменьшить каждую сторону квадрата, равную 25 см, чтобы площадь нового квадрата уменьшилась не более чем на 49 см^2? Из данных неравенств выберите то, с помощью которого можно решить задачу.

А: $x^2 - (25 - x)^2 < 49$;
Б: $25^2 - (25 - x)^2 \leqslant 49$;
В: $(25 - x)^2 - x^2 \leqslant 49$.

2. Решите указанное вами в задаче 1 неравенство и дайте ответ на вопрос этой задачи.

3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{3-5x-2x^2}$.

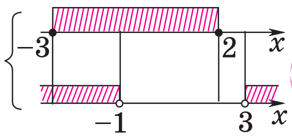
4. Решите неравенство:

а) $(x - 5)(x + 3)\sqrt{2-x} \geqslant 0$; в) $\frac{3x-1}{x+1} \leqslant 2$;

б) $(x + 2)(2 - x) > (x + 2)(x + 4)$; г) $\sqrt{(x-8)^2} \leqslant 3$.

5. При каких значениях a неравенство $x^2 + (a + 2)\,x + (5a + 1) > 0$ справедливо при всех значениях $x \in \boldsymbol{R}$?

Глава II



Системы неравенств

§ 3. Решение систем неравенств с одной переменной

1. Решение систем неравенств

Напомним, что если требуется найти все общие решения двух или более неравенств, то говорят о системе этих неравенств, которую надо решить. Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств. Решить систему неравенств — значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Системы неравенств называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений или этих решений нет. Равносильность систем неравенств обозначается знаком $\Leftrightarrow$.

Мы уже рассматривали в предыдущем классе решения систем линейных неравенств с одной переменной, которые сводятся к следующим случаям: ($a < b$, рис. 21—24).

а) $\begin{cases} x > a, \\ x > b; \end{cases}$ Ответ: $(b; +\infty)$.

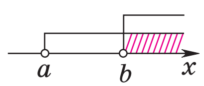


Рис. 21

б) $\begin{cases} x > a, \\ x < b; \end{cases}$ Ответ: $(a; b)$.

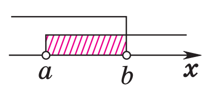


Рис. 22

в) $\begin{cases} x < a, \\ x < b; \end{cases}$ Ответ: $(-\infty; a)$.

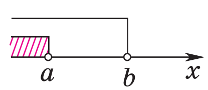


Рис. 23

г) $\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$ Ответ: нет решений.

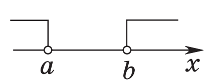


Рис. 24

Пример 1. Решить систему неравенств $\begin{cases} 1-5x \leqslant 11, \\ 3x-9 > 0. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 1-5x \leqslant 11, \\ 3x-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \leqslant 11-1, \\ 3x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \leqslant 10, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x > 3. \end{cases}$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

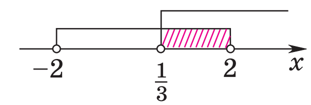
Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} |x| < 2, \\ 3x+4 > 5. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} |x| < 2, \\ 3x+4 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x > \frac{5-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 2 \text{ (рис. 25).}$$

Рис. 25



Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Пример 3. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2+x-6 \leqslant 0, \\ x^2-2x-3 > 0. \end{cases}$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

1) $x^2 + x - 6 \leqslant 0$. Данное квадратное неравенство решим с использованием свойств функции $y = x^2 + x - 6$. Нули этой функции — числа -3 и 2. Ветви параболы направлены вверх. Определим промежутки знакопостоянства функции (рис. 26, *а*). Получили $y \leqslant 0$ при любом $x \in [-3; 2]$.

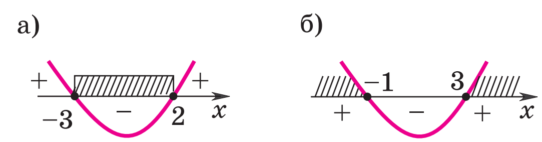


Рис. 26

2) $x^2 - 2x - 3 > 0$. Находим нули функции $y = x^2 - 2x - 3$. Это числа -1 и 3. Ветви параболы направлены вверх. Определим промежутки знакопостоянства функции (рис. 26, *б*). Получили $y > 0$ при любом $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Находим все общие решения этих неравенств (рис. 27).

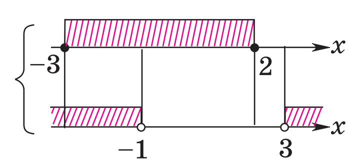


Рис. 27

Ответ: $[-3; -1)$.

Пример 4*. Решить систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{x} < 9, \\ x^{-1} > 5. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{x} < 9, \\ x^{-1} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 81, \\ \frac{1}{x} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 81, \\ \frac{1-5x}{x} > 0. \end{cases}$$

Поскольку решениями могут быть только положительные числа, то достаточно решить систему:

$$\begin{cases} 0 < x < 81, \\ 1-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 81, \\ x < 0{,}2. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0,2).

Пример 5*. Найти все значения параметра m, при которых оба корня уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ принадлежат промежутку $(-2; 4)$.

Решение. Решим данное уравнение:

$$x_{1,\,2} = m \pm \sqrt{m^2 - m^2 + 1} = m \pm 1.$$

По условию имеем:

$$\begin{cases} -2 < m+1 < 4, \\ -2 < m-1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3, \\ -1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Ответ: $m \in (-1; 3)$.

Пример 6*. Решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x} < 1, \\ x^2 < 64. \end{cases}$

Решение. Решаем первое неравенство системы неравенств:

$$\frac{x^2+x-4}{x} - 1 < 0, \quad \frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0.$$

Далее применяем метод интервалов (рис. 28, *а*)

$$x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2).$$

Решаем методом интервалов (рис. 28, *б*) второе неравенство системы: $x^2 - 64 < 0$, $(x-8)(x+8) < 0$, $x \in (-8; 8)$.

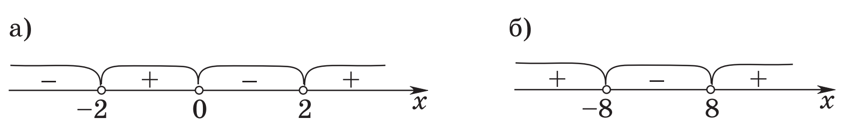


Рис. 28

Общими решениями каждого из неравенств данной системы неравенств являются все числа из промежутков $(-8; -2)$ и $(0; 2)$.

Ответ: $(-8; -2) \cup (0; 2)$.

Пример 7*. Найти, при каких действительных числах a система уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 3, \\ ax + (a-1)y = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение $(x; y)$ такое, что $x > 0$ и $y > 0$.

Решение. Данная система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет решение, если $3(a-1) - 4a \neq 0$ и $a \neq -3$. Решая систему уравнений методом подстановки, получим $x = \frac{23-3a}{a+3}$, $y = \frac{3a-15}{a+3}$. Далее находим условия, при которых $x > 0$ и $y > 0$:

$$\begin{cases} \frac{23-3a}{a+3} > 0, \\ \frac{3a-15}{a+3} > 0. \end{cases}$$

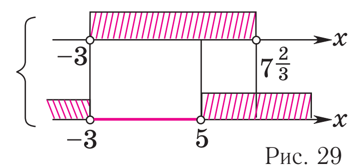


Рис. 29

Решаем каждое неравенство системы методом интервалов и находим их общие решения (рис. 29).

Ответ: при $a \in \left(5; 7\frac{2}{3}\right)$.

2. Решение текстовых задач с применением систем неравенств

С применением систем неравенств решают многие текстовые задачи, причем часто приходится комбинированно применять системы уравнений и неравенств. Рассмотрим примеры.

Задача 1. Из городского поселка в деревню направился пешеход. Расстояние от поселка до деревни равно 20 км. Если пешеход увеличит скорость движения на 1 км/ч, то за 4 ч он пройдет расстояние не меньше 18 км; если он уменьшит скорость на 1 км/ч, то даже за 5 ч не успеет прийти в деревню. Найдите скорость пешехода.

Решение. Обозначим скорость пешехода через x км/ч. Если пешеход увеличит скорость на 1 км/ч, то она будет равной $(x + 1)$ км/ч, и за 4 ч пешеход пройдет $4(x + 1)$ км. По условию задачи $4(x + 1) \geqslant 18$. Если пешеход шел бы со скоростью $(x - 1)$ км/ч, то за 5 ч он прошел бы $5(x-1)$ км. По условию задачи $5(x-1)<20$. Составляем систему неравенств

$$\begin{cases}4(x+1)\geqslant 18,\\5(x-1)<20.\end{cases}$$

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases}x+1\geqslant 4{,}5,\\x-1<4;\end{cases}\quad\begin{cases}x\geqslant 3{,}5,\\x<5.\end{cases}$$

Таким образом, значение x должно удовлетворять условию $3{,}5\leqslant x<5$.

Ответ: пешеход шел со скоростью меньше 5 км/ч, но не меньше 3,5 км/ч.

Задача 2. Какой должна быть температура 10 л воды, смешав которую с 6 л воды с температурой 15 °С, получим воду с температурой не меньше 30 °С и не больше 40 °С?

Нагреванием сосуда, в котором находится вода, пренебречь.

Решение. Обозначим неизвестную температуру через x °С. Учитывая, что удельная теплоемкость воды единица, имеем:

$(6\cdot 15+10x)$ ккал — количество теплоты смеси воды;

$16\cdot 30$ ккал — количество теплоты 16 л воды при температуре 30°;

$16\cdot 40$ ккал — количество теплоты 16 л воды при температуре 40°.

По условию задачи:

$$\begin{cases}6\cdot15+10x\geqslant 16\cdot30,\\6\cdot15+10x\leqslant 16\cdot40;\end{cases}\quad\begin{cases}10x\geqslant 390,\\10x\leqslant 550;\end{cases}\quad\begin{cases}x\geqslant 39,\\x\leqslant 55;\end{cases}$$

$$39\leqslant x\leqslant 55.$$

Ответ: температура 10 л воды должна быть не меньше 39 °С и не больше 55 °С.

Задача 3*. Известно, что площадь прямоугольника равна 56 м^2. Если ширину прямоугольника уменьшить на 1 м, а длину увеличить на 1 м, то площадь прямоугольника уменьшится. Если ширину прямоугольника увеличить на 2 м, а длину уменьшить на 1 м, то площадь прямоугольника увеличится. Какая ширина этого прямоугольника?

Решение. Пусть ширина данного прямоугольника равна x м $(x>0)$, тогда его длина $\frac{56}{x}$ м. По условию задачи

$$\begin{cases}(x-1)\left(\frac{56}{x}+1\right)<56,\\(x+2)\left(\frac{56}{x}-1\right)>56,\\x-1>0.\end{cases}$$

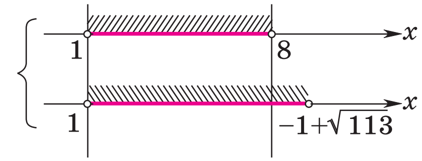


Рис. 30

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases}56+x-\frac{56}{x}-1<56,\\56-x+\frac{112}{x}-2>56,\\x-1>0;\end{cases}\quad\begin{cases}x^2-x-56<0,\\-x^2-2x+112>0,\\x-1>0.\end{cases}$$

Решаем каждое из неравенств системы и находим их общие решения (рис. 30).

Ответ: меньше 8 м, но больше 1 м.

?

1. Что называется системой неравенств?
2. Что называется решением системы неравенств с одной переменной?
3. Что значит решить систему неравенств с одной переменной?
4. Какие два неравенства с одной переменной называются равносильными? Приведите пример.

Задания

Устные упражнения **103—107**.

103. Является ли число 5 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases}5x-20>0,\\2x-14<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2\leqslant 25,\\2x+3>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}1-3x<10,\\5-2x>4?\end{cases}$

104. Какие из чисел -2; 0; 5; 6 являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases}6x-24<0,\\2x-1>3?\end{cases}$$

105. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}x\geqslant 5,\\x<10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\leqslant 4,\\-x>-6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}-4x<-16,\\\frac{x}{2}\geqslant 3{,}5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}-4x\geqslant -12,\\5x\geqslant 15.\end{cases}$

106. Решите двойное неравенство:

а) $-2 < 2x < 6$; в) $0 < x + 1 < 5$;

б) $-6 \leqslant \frac{1}{3}x \leqslant 9$; г) $-4 \leqslant x - 2 \leqslant 1$.

107. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0 \cdot x < 8, \\ x > 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \cdot x > -2, \\ x \leqslant 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 \leqslant 0, \\ x - 5 > 2. \end{cases}$

108. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$; б) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

109. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x-5<7, \\ 2x+5<13, \\ 3-x>1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 13-2t<13, \\ t-1>0, \\ 5t-35<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-4 \leqslant 1, \\ 2x-1 \leqslant x+3, \\ 5x-1>6-2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 16-8k<0, \\ 6-k>2, \\ 3k-1<4. \end{cases}$

110. Решите неравенство:

а) $|x| < 3$; в) $|x-1| < 2$;

б) $|2x| \leqslant 8$; г) $|x+4| \leqslant 5$.

111. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{3x-17}$; б) $\sqrt{12+5x} + \sqrt{2x-1}$?

112. а) При каких значениях a значения двучлена $1 - 5a$ принадлежат числовому промежутку $[0; 1]$?

б) При каких значениях b значения дроби $\frac{-2b}{13}$ принадлежат числовому промежутку $(-2; 4)$?

113. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x}$; в) $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{3x-9}$;

б) $y = \sqrt{x} - \sqrt{3x-1}$; г) $y = \sqrt{2x+2} - \sqrt{7-4x}$.

114. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3{,}4-3{,}4(1-5x) > 2(x-0{,}5), \\ 1{,}6+1{,}6(2-4x) \leqslant 3(x+0{,}4); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 18x-6 \leqslant 0, \\ 15{,}(4)-0{,}(4)x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(x+1)-(x^2-10) \leqslant 1-6x, \\ 3{,}5-(x-1{,}6) < 6-4x; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1{,}75 > 2{,}5x - \frac{7}{8}, \\ \frac{2x+1}{4} - 5 < -\frac{1-2x}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5{,}8(1-c)-1{,}8(6-c) < 14, \\ -4(2-5c) < -(6c-5); \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3^{-1}(2x+1) < x - \frac{3-2x}{5}, \\ \frac{x}{3} - 1{,}1(6) < \frac{5}{3}x - 6^{-1}\sqrt{121}. \end{cases}$

115. Решите неравенство:

а) $12 < 2x + 1 < 14$; в) $2 < 6 - 2k \leqslant 5$;

б) $-2 \leqslant -x - 1 \leqslant 10$; г) $-4 \leqslant 5y - 4 < 20$.

116. Решите неравенство:

а) $-7{,}5 < \frac{7x+6}{3} < 19{,}5$; в) $-3 \leqslant \frac{1-4x}{4} < 0$;

б) $-1 < \frac{4-x}{2} \leqslant 5$; г) $-2 < \frac{11x+14}{14} < 0$.

117. Решите неравенство:

а) $|3x-0{,}3| \leqslant 8$; в) $|2x+3| \geqslant 1$;

б) $2\left|x-\frac{1}{3}\right| \leqslant 0{,}2$; г*) $\big||x|-1\big| \leqslant 5$.

118. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 2x-1>5x-4, \\ 11x-10<15x+2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}4x+\frac{7}{3} < \frac{2}{3}x-1{,}2, \\ 5x+17>9x-63, \\ |x| \leqslant 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{7-x}{2} - (0{,}(3))^{-1} < \frac{3+4x}{5} - 4, \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) > \sqrt{\sqrt{2^4}}\,(4-x); \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ x^{-1} \leqslant -2^{-1}. \end{cases}$

119. Решите неравенство:

а) $\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right| < 1$; б) $\frac{x^2+|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

120. При каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

а) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{6-2x}$; б) $\sqrt{16-x^2} + \sqrt{-2x-8}$?

121. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-x-2<0, \\ 5-x<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-5x+6\geqslant 0, \\ 2-x^2-x\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4+3x-x^2>0, \\ 2-x>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+x\geqslant 0, \\ x^2+5x+6\geqslant 0. \end{cases}$

122. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $0<x^2+6x\leqslant 7$; б) $x\leqslant x^2+20\leqslant 9x$; в) $-3<\frac{x+1}{1-x}\leqslant 2$.

123. Найдите все целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2}<2x, \\ \frac{2x+15}{9}>5^{-1}(x-1)+\frac{x}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1}<0, \\ x^2<36. \end{cases}$

124. Решите неравенство:

а) $\left(3-\sqrt{10x}\right)(2x-7)<0$; б) $\left(3\sqrt{2}x-3\right)(5-2x)\geqslant 0$.

125. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x^2>1, \\ -2x^2+5x-3>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-14x+45<0, \\ x^2-11x+30\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2\leqslant 4, \\ x^2-x-6\geqslant 0; \end{cases}$ г*) $\begin{cases} \frac{2-x}{x+1}\geqslant 1, \\ x^{-2}\geqslant 1. \end{cases}$

126. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -\frac{3}{4}x-10\sin 150^\circ<x+2{,}4, \\ 2x-4\cos 90^\circ>3{,}3-0{,}5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{4}\operatorname{tg} 45^\circ-5x<x-\frac{7}{8}, \\ 4x-\frac{5}{4}\cos 60^\circ<3{,}5-x. \end{cases}$

127*. Решите уравнение:

а) $|2x-4|=10-5x$; б) $|x-1|=2x-4$.

128. Решите неравенство:

а) $(x-5)\sqrt{x-2}\geqslant 0$; в) $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{3-13x}}>0$;

б) $\frac{2x-3}{\sqrt{1-x}}\leqslant 0$; г) $\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}>0$.

129*. Решите неравенство:

а) $|x-3|\leqslant 6-3x$; в) $|x+2|-|x-3|\geqslant 2x-1$;

б) $|2x+5|<x+4$; г) $|x-2|+|x-3|\leqslant 6-3x$.

130*. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x-4|<x-3, \\ |x-1|+|x-2|+|x-3|<6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-2|<5-x, \\ \frac{2x-9}{x-6}<1. \end{cases}$

131*. При каких целых значениях b система уравнений $\begin{cases} 6x-3y=b+3, \\ 5x+2y=2b \end{cases}$ имеет решение $\begin{cases} x<2, \\ y>0? \end{cases}$

132*. При каких значениях n выражение $nx^2+(n-1)x+n-1$ принимает отрицательные значения при любых действительных значениях x?

133*. Найдите все действительные числа a, при которых система уравнений $\begin{cases} (a-2)x-4y=5a, \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ имеет решения $(x;\ y)$ такие, что $x>0$, $y<0$.

134. При каких значениях c уравнение имеет отрицательные корни: а) $x^2+(c+1)x+c+4=0$; б*) $c^2x^2+(c-1)x=1-c$?

135*. При каких значениях a неравенство $(a-2)x^2+2\sqrt{3}x+a>0$ выполняется при всех действительных значениях x?

136*. Найдите наибольшее целое значение m, при котором уравнение $x^2-2(m+2)x-5=2m$ имеет два разных отрицательных корня.

137*. При каких значениях p корни уравнения $(1+p)x^2-2x=2-p$ положительны?

138*. При каких значениях k корни уравнения $(2k+2)t^2+(k+9)t+4=0$ принадлежат промежутку $(-2;\ 0)$?

139. Если из $\frac{1}{2}$ натурального числа вычесть $\frac{1}{3}$ его, то получится число больше 13; если из $\frac{3}{2}$ этого числа вычесть его, то получится число меньше 40. Найдите неизвестное число.

140. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая — 9 см. Какой может быть третья сторона треугольника, если его периметр: а) меньше 27 см; б) больше 21 см?

141. Если туристы будут проходить в день на 5 км больше, чем наметили, то за 6 дней они пройдут более 90 км. Если же они будут проходить в день на 5 км меньше, то за 8 дней пройдут менее 90 км. Сколько километров в день проходили туристы?

142. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки 1 км/ч. В каких пределах должна быть заключена собственная скорость лодки, чтобы все путешествие заняло от 3 до 4 часов?

143*. У некоторой обыкновенной дроби знаменатель меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю этой дроби прибавить по 2, то ее значение будет больше $\frac{1}{3}$; если же из числителя и знаменателя вычесть по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше $\frac{1}{10}$. Что это за дробь?

144*. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5 и 40%. Сколько надо взять лома каждого сорта, чтобы получить 140 кг стали, содержащей не менее 30 % и не более 35 % никеля?

145*. Смешали 20 л воды при температуре 40 °C и 50 л воды при температуре 10 °C. Сколько литров воды с температурой 30 °C нужно долить в эту смесь, чтобы новая смесь имела температуру не больше 20 °C, но не меньше 15 °C?

Повторение главы II

Исторические сведения

Понятия «больше» и «меньше» наряду с понятием равенства возникли в связи со счетом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Понятиями неравенства пользовались уже древние греки. Архимед (III в. до н. э.), занимаясь вычислением длины окружности, установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Иначе говоря, Архимед указал границы числа π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ряд неравенств приводит в своем знаменитом трактате «Начала» Евклид (III в. до н. э.). Он, например, доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического, т. е. что верно неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. В «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (a, b, c, d — положительные числа), то $ad > bc$.

Однако все эти рассуждения проводили словесно, опираясь в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенств появились лишь в XVII—XVIII вв. Знаки $<$ и $>$ ввел английский математик Т. Гарриот (1560—1621), знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — французский математик П. Буге (1698—1758).

Неравенства и системы неравенств широко используются как в теоретических исследованиях, так и при решении важных практических задач.

Контрольные вопросы

1. Что называют системой неравенств? Приведите примеры.

2. Что называют решением системы неравенств и что значит решить систему неравенств?

3. Какие способы решения систем неравенств с одной переменной вы знаете? Объясните эти способы на примерах.

4. Объясните на примерах способы решения текстовых задач с использованием: а) систем неравенств; б) смешанных систем уравнений и неравенств.

5. Какие системы неравенств являются равносильными? Приведите примеры равносильных и неравносильных систем неравенств.

Задания

146. Решите систему неравенств относительно переменной x при условии $a < b$:

а) $\begin{cases} x < a, \\ x \leqslant b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \geqslant a, \\ x > b; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \geqslant a, \\ x \leqslant b; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \leqslant a, \\ x \geqslant b. \end{cases}$

147. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x+4 < 4x+10, \\ 3x+7 < 2x+8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x-2 > 4x+3^{-1}, \\ 3x-4 < x+2^{-2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x+3>8, \\ 2x+4<2<2(12+x); \end{cases}$ д) $\begin{cases} 0{,}75-5x < x-\frac{7}{8}, \\ 4x-\frac{5}{8} < 3{,}5-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+2 \geqslant x+12, \\ 4x-6 < 13x+14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -3\frac{3}{4}x-5 < x+2{,}4, \\ 2x-4 > 3{,}3-\frac{1}{2}x. \end{cases}$

148. При каких натуральных значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2{,}1-x}+\sqrt{x-0{,}1}$; б) $\dfrac{\sqrt{3{,}6-x}}{\sqrt{x-1}}$?

149. При каких значениях x не имеет смысла выражение:

а) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt{5x^2-7x+2}$?

150. Найдите область определения функции y:

а) $y=\sqrt{x}-\sqrt{7-x}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$;

б) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{x+14}$; г) $y=\sqrt{x(x-2)}$.

151. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{3-x}{2}+\dfrac{x}{4}>14\sin 30°,\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{2-x}{3}\leqslant 10\cos 60°.\end{cases}$$

152. Решите неравенство:

а) $-6<x^2+x<2$; в*) $0<\dfrac{x-3}{x+5}<\dfrac{1}{2}$.

б) $-1\leqslant x^2+x\leqslant 12$;

153. Найдите область определения функции

$$y=3^{-1}\sqrt{x^2-5x-14}-3\sqrt{x^2-x-20}.$$

154. За 8 рейсов автобус перевез не менее 185 пассажиров, а за 15 рейсов — не более 370 пассажиров. Известно, что за каждый рейс автобус перевозил ровно столько пассажиров, сколько мест в нем. Сколько мест в автобусе?

155. Для получения крахмала берут рис и ячмень, причем ячменя берут в 4 раза больше, чем риса. Сколько килограммов риса и ячменя надо взять, чтобы получить более 60, но не более 100 кг крахмала, если известно, что рис содержит 75 % крахмала, а ячмень 60 %?

156. Сумма некоторого четного числа с удвоенным предыдущим четным числом больше 40, а сумма этого же четного числа с числом, равным 40 % от удвоенного следующего числа, меньше 30. Найдите это число.

157. Бригада из 8 рабочих за 5 дней изготовила не более 300 деталей, а за 10 дней — не менее 500 деталей. Сколько деталей в день изготовлял каждый рабочий этой бригады? (Производительность труда каждого из рабочих считать одинаковой.)

158. Пристань B расположена ниже пункта A по течению реки. Скорость течения реки 2 км/ч. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы продолжительность пути из A в B составила не менее 0,7, но не более 0,9 продолжительности пути из B в A при условии, что во время движения против течения реки собственная скорость лодки увеличивается в 1,5 раза?

159. а) В раствор объемом 10 л, содержащий 50 % кислоты, доливают раствор, содержащий 20 % такой же кислоты. Сколько можно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала не менее 30 %, но не более 35 % кислоты?

б) В раствор объемом 5 л, содержащий 30 % кислоты, начали вливать раствор, содержащий 70 % кислоты. Сколько надо влить второго раствора в первый, чтобы их смесь содержала не менее 60 %, но не более 65 % кислоты?

160. Решите неравенство:

а) $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|\geqslant 2$; б) $|x^2-4x|<5$; в) $|x^2-2x-8|>2x$.

161*. При каких значениях a система неравенств $\begin{cases}ax-1\leqslant 0,\\ x-4a\geqslant 0\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

162*. При каких значениях p уравнение $x^2-2(p-3)x+{}$ $+3(p+3)=0$ имеет корни разных знаков?

163*. Найдите все значения p, при которых корни уравнения $x^2-(3p+1)x-3p-2=0$ принадлежат промежутку $[-1;\ 2]$?

164*. Для каких значений a корни уравнения

$$x^2-2(a-1)x+a+5=0$$

а) положительны; б) отрицательны; в) имеют разные знаки?

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. Какие из чисел -3; -1; 0; 3 являются решениями неравенств:

а) $|x|<3$; б) $|x|\leqslant 3$?

2. Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и a см, где a — натуральное число. Какие значения возможны для a?

3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2(x-1)-3 < 5(2x-1)-7x, \\ 3(x+1)-2 \geqslant 6(x-1)+7x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2}-1{,}3x \geqslant \dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{x-3}{5} < \dfrac{x+5}{3}. \end{cases}$

4. Найдите все целые значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$;   б) $\sqrt{14+5x-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{20+x-x^2}}$.

5. Сумма нечетного числа с числом, равным 200 % от следующего нечетного числа, меньше 151, а сумма этого же нечетного числа с увеличенным втрое предыдущим нечетным числом больше 174. Найдите это число.

Вариант 2*

1. Какие из чисел -2; 0; 3; 5 входят в область определения выражения $\sqrt{3-a}+\sqrt{a-3}$?

2. Совпадают ли области определения функций, заданных формулами: $f(x)=\sqrt{(x-2)(x+3)}$ и $h(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}$?

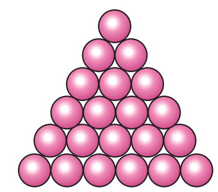
3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -3(-2x-1)<-4x-17, \\ x(x+1)\geqslant(x-2)(x+2)-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2+x-2 \geqslant 0, \\ \dfrac{3x+1}{4} \geqslant \dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

4. Решите неравенство:

а) $\left|x-1\dfrac{1}{3}\right| \leqslant 3$;   б) $\left(x-\dfrac{4}{x}\right)^2-5\left(x-\dfrac{4}{x}\right)+6\leqslant 0$.

5. Велосипедист проехал с некоторой постоянной скоростью расстояние AB, равное 60 км; на обратном пути он один час ехал с той же скоростью, затем сделал остановку на 20 мин, а остальной путь проехал со скоростью, увеличенной на 4 км/ч. С какой скоростью ехал велосипедист из пункта A в пункт B, если известно, что на обратный путь из B в A он затратил времени не больше, чем из A в B, но не больше чем 4 ч 20 мин?



Глава III

Прогрессии. Корни степени n

§ 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Числовая последовательность

Рассмотрим ряд чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Поставим в соответствие каждому натуральному числу квадрат этого числа:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25. \qquad (1)$$

Полученные числа образуют конечную *последовательность* квадратов пяти первых натуральных чисел.

Поставим теперь в соответствие каждому натуральному числу обратное ему число, получим другую — бесконечную последовательность:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ ...,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ ... \,. \qquad (2)$$

Если имеется правило, которое каждому натуральному числу $\boldsymbol{n}$ ставит в соответствие некоторое действительное число $\boldsymbol{a_n}$, то говорят, что задана ***числовая последовательность***:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ... \,.$$

Каждое число $\boldsymbol{a_n}$ называется *членом последовательности*, а $\boldsymbol{n}$ — его *номером*.

Число a_1 — первый член последовательности;
число a_8 — восьмой член последовательности;
число a_n — n-й (энный) член последовательности;
число a_{n+1} — $(n+1)$-й (эн плюс первый) член последовательности.

Например, второй член последовательности (2) равен $\frac{1}{2}$, т. е. $a_2=\frac{1}{2}$, пятый член этой последовательности равен $\frac{1}{5}$.

Числовая последовательность — это функция, заданная на множестве n первых натуральных чисел или на множестве всех натуральных чисел. Числа, образующие последовательность, называются соответственно первым, вторым, третьим и т. д. *членами последовательности*. При этом подчеркнем, что в первом случае последовательность считается *конечной*, во втором — *бесконечной*.

Числовую последовательность можно задать формулой n-го члена. Например, последовательность (1) можно задать формулой $a_n = n^2$. Тогда $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^2 = 9$.

Пример 1. Числовая последовательность задана формулой $a_n = \frac{n(n^2-1)}{2}$. Вычислить сотый член этой последовательности.

Решение. $a_{100} = \frac{100(100^2-1)}{2} = 499\,950$.

Иногда последовательность задают формулой, позволяющей вычислить $(n+1)$-й член последовательности через предыдущие n членов. В этом случае задают один или несколько первых членов последовательности. Такой способ задания последовательности называется *рекуррентным*.

Пример 2. Найти четвертый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 3a_n$ и условием $a_1 = 2$.

Решение. Для того чтобы найти четвертый член последовательности, вычислим предыдущие:

$$a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 2 = 6,$$
$$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 6 = 18,$$
$$a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54.$$

Ответ: 54.

2. Арифметическая прогрессия

Задача. Отдыхающему друг порекомендовал следующий недельный режим солнечных ванн: в первый день загорать 10 мин, а в каждый последующий день увеличивать время пребывания на солнце на 5 мин. Сколько времени будет загорать отдыхающий в каждый из этих дней? Чтобы ответить на этот вопрос, составим последовательность значений времени пребывания на солнце:

$$10, 15, 20, 25, 30, 35, 40.$$

В этой последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 5. Такие последовательности называют арифметическими прогрессиями.

Определение. **Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для этой последовательности числом.**

Из определения следует, что разность между $(n+1)$-м и n-м членом арифметической прогрессии одна и та же для всех значений n. Это число называется ***разностью арифметической прогрессии*** и обозначается буквой d.

Другими словами, числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

является арифметической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется условие

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — разность арифметической прогрессии.

Примеры:

1) натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ..., n, ... образует арифметическую прогрессию. Разность этой прогрессии $d = 1$;

2) последовательность целых отрицательных чисел $-1, -2, -3, \ldots$ — арифметическая прогрессия с разностью $d = -1$;

3) последовательность натуральных чисел, кратных пяти, 5, 10, 15, ..., $5n$, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d = 5$;

4) последовательность 9, 9, 9, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d = 0$.

Теорема. **Если**

$$\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots} \text{ —}$$

арифметическая прогрессия с разностью d, то

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

Доказательство. По определению разности арифметической прогрессии

$$a_2 - a_1 = d,$$
$$a_3 - a_2 = d,$$
$$a_4 - a_3 = d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = d,$$
$$a_n - a_{n-1} = d.$$

Сложим почленно равенства, получим:

$$a_n - a_1 = (n-1)d.$$

Откуда $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Теорема. **Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, т. е.**

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ где } n > 1.$$

Докажите самостоятельно.

Обратная теорема. **Если каждый член последовательности, кроме первого, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов прогрессии, то эта последовательность является арифметической прогрессией.**

Доказательство. Пусть последовательность

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

такова, что $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ для любого $n > 1$. Тогда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, откуда $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$.

Так как разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.

Эти теоремы являются взаимно обратными. Их можно объединить в одну теорему. В этом случае в формулировке теоремы используются слова «тогда и только тогда», «в том и только в том случае».

Теорема, объединяющая эти теоремы.

Три числа a, b и c являются последовательными членами арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда число b есть среднее арифметическое чисел a и c, т. е. $b = \frac{a+c}{2}$.

Рассмотрим теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

Теорема. **Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.**

Доказательство. Запишем S_n двумя способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

По определению арифметической прогрессии каждый ее член получается из предыдущего прибавлением к нему числа d. Поэтому сумму S_n можно записать так:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-1)d). \qquad (1)$$

Точно так же каждый член прогрессии можно получить из последующего вычитанием из него числа d. Поэтому сумму S_n можно записать и так:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n-1)d). \qquad (2)$$

Сложим почленно равенства (1) и (2):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Следовательно,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

откуда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Сумму n первых членов прогрессии можно выразить через первый член и разность прогрессии d.

Сделайте это самостоятельно, и получите формулу:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Пример 1. Найти формулу n-го члена арифметической прогрессии 6, 10, 14, ...

Решение. Найдем разность этой арифметической прогрессии: $d = 10 - 6 = 4$. Так как $a_1 = 6$, $d = 4$, то получим:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + (n-1)4 = 4n + 2.$$

Ответ: $a_n = 4n + 2$.

Пример 2. Выяснить, является ли число 71 членом арифметической прогрессии (x_n):

$$-10; -5{,}5; -1; 3{,}5; ... .$$

Решение. В данной арифметической прогрессии $x_1 = -10$ и $d = x_2 - x_1 = -5{,}5 - (-10) = 4{,}5$. Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$$x_n = -10 + 4{,}5(n-1), \text{ т. е.}$$
$$x_n = 4{,}5n - 14{,}5.$$

Число 71 является членом арифметической прогрессии (x_n), если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $4{,}5n - 14{,}5$ равно 71. Решим уравнение

$$4{,}5n - 14{,}5 = 71.$$

Получим:
$$4{,}5n = 85{,}5,$$
$$n = 19.$$

Значит, число 71 является членом данной арифметической прогрессии.

Пример 3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, в которой $a_1 + a_2 + a_3 = -60$, $d = 4$. Найти число отрицательных членов.

Решение. Известно, что $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, или $a_1 + a_3 = 2a_2$. Тогда имеем $a_1 + a_2 + a_3 = 2a_2 + a_2 = 3a_2 = -60$, откуда $a_2 = -20$.

$a_1 = a_2 - d = -20 - 4 = -24$.

$a_n = a_1 + (n-1)d = -24 + (n-1)4$. По условию требуется $a_n < 0$, т. е. $-24 + (n-1)4 < 0$, откуда $(n-1) < 6$, $n < 7$. Отрицательных членов шесть: a_1, a_2, ..., a_6.

Ответ: шесть.

Пример 4. Найти сумму $1 + 2 + ... + 2005$, слагаемыми в которой являются все натуральные числа от 1 до 2005.

Решение. Применив формулу $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ к арифметической прогрессии 1, 2, 3, ..., получим, что

$$1 + 2 + 3 + ... + 2005 = \frac{(1+2005)\cdot 2005}{2} = 2\,011\,015.$$

Ответ: 2 011 015.

Пример 5. Найти сумму всех натуральных чисел, кратных шести и не превосходящих 250.

Решение. Натуральные числа, кратные шести, образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 6n$. Чтобы выяснить, сколько членов этой прогрессии не превосходит 250, решим неравенство $6n \leqslant 250$. Получим $n \leqslant 41\frac{2}{3}$. Значит, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41.

Имеем: $a_1 = 6$, $a_{41} = 6 \cdot 41 = 246$,

$$S_{41} = \frac{(6+246)\cdot 41}{2} = 5166.$$

Ответ: 5166.

Пример 6*. В арифметической прогрессии:

$$a_5 + a_7 = 2,\ a_2 = 3.$$

Найти S_7.

Решение. *I способ.* $a_5 = a_1 + 4d$, $a_7 = a_1 + 6d$. По условию $a_1 + 4d + a_1 + 6d = 2$. Откуда $2a_1 + 10d = 2$, или $a_1 + 5d = 1$.

По условию $a_2 = a_1 + d = 3$. Откуда $a_1 = 3 - d$. Подставив в предыдущее уравнение, получим $(3 - d) + 5d = 1$. Решив его, найдем $d = -0{,}5$. Тогда $a_1 = a_2 - (-0{,}5) = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$.

По формуле суммы n первых членов имеем:

$$S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2}\cdot 7 = \frac{2\,(3{,}5) + 6(-0{,}5)}{2}\cdot 7 = 14.$$

II способ. По свойству арифметической прогрессии $a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2} = 1$; $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2}\cdot 7$. По свойству арифметической прогрессии $a_2 + a_6 = a_1 + a_7$. Отсюда $S_7 = \frac{a_2 + a_6}{2}\cdot 7 = \frac{3+1}{2}\cdot 7 = 14$.

Ответ: 14.

3. Геометрическая прогрессия

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 4 см.

Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 31). По свойству средней линии треугольника сторона второго треугольника равна 2 см. Продолжая аналогичные построения, получим треугольники со сторонами 1 см; $\frac{1}{2}$ см.

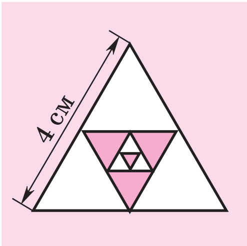


Рис. 31

Запишем последовательность длин сторон этих треугольников: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$.

В этой последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$. Такие последовательности называют геометрическими прогрессиями.

Определение. **Геометрической прогрессией называется числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число.**

Из определения следует, что частное от деления $(n+1)$-го на n-й член геометрической прогрессии — одно и то же число для всех значений n. Это число называется ***знаменателем геометрической прогрессии*** и обозначается буквой q.

Другими словами, числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ является геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется условие $b_{n+1} = b_n q$, где q — знаменатель геометрической прогрессии.

Отметим, что $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ и любой член геометрической прогрессии не равен нулю.

Примеры:

1) $12; 18; 27; 40{,}5; ...$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1{,}5$;

2) $\frac{1}{12}$, -1, 12, -144, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = -12$;

3) 17, 17, 17, 17, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1$.

Теорема. **Если $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ — геометрическая прогрессия со знаменателем q, то $b_n = b_1 q^{n-1}$.**

Доказательство. По определению геометрической прогрессии

$$\left.\begin{aligned} &b_2 = b_1 q,\\ &b_3 = b_2 q,\\ &b_4 = b_3 q,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &b_{n-1} = b_{n-2} q,\\ &b_n = b_{n-1} q \end{aligned}\right\} (n-1) \text{ равенств.}$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$b_2 b_3 b_4 \ldots b_{n-1} b_n = b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-2} b_{n-1} q^{n-1}.$$

Разделив обе части этого равенства на число

$$b_2 b_3 b_4 \ldots b_{n-1} \neq 0,$$

получим:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула справедлива и при $n = 1$, учитывая, что $q^0 = 1$ при $q \neq 0$.

*Теорема. **Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, кроме первого, равен произведению двух соседних с ним членов, т. е.**

$$\mathbf{b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}}, \text{ где } n > 1.$$

Доказательство. По определению геометрической прогрессии

$$b_n = b_{n-1} q,$$
$$b_{n+1} = b_n q.$$

Разделив первое равенство на второе, получим:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_{n-1}}{b_n},$$

откуда $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$.

Обратная теорема. **Пусть дана последовательность, члены которой не равны нулю. Если квадрат каждого члена последовательности, кроме первого, равен произведению двух соседних с ним членов, то эта последовательность — геометрическая прогрессия.** (Докажите самостоятельно.)*

Примечание. Из этих теорем следует, что три положительных числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда число b есть среднее геометрическое чисел a и c, т. е. $b = \sqrt{ac}$.

Рассмотрим произвольную геометрическую прогрессию:

$$b_1, b_1 q, ..., b_1 q^{n-1}, ...,$$

знаменатель которой $q \neq 1$.

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... + b_1 q^{n-1}.$$

Теорема. **Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна**

$$\mathbf{S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}}.$$

Умножая обе части равенства

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... + b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n-1} \quad (1)$$

на знаменатель q, получаем: $qS_n = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 ... + b_1 q^n$. (2)

Вычитая из равенства (1) равенство (2), находим:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1 q^n, \text{ откуда } S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Заметим, что если $q = 1$, то $S_n = b_1 + b_1 + ... + b_1 = b_1 n$.

Можно и так получить формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... + b_1 q^{n-1};\ S_n = b_1 + q\,(S - b_1 q^{n-1}),$$

откуда

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Пример 1. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии 6, 2, $\frac{2}{3}$, … .

Решение. В этой прогрессии $b_1=6$, $q=\frac{1}{3}$. По формуле $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ находим:

$$S_5=\frac{6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{6\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}}=\frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243}=\frac{242}{27}.$$

Ответ: $\frac{242}{27}$.

Пример 2. В геометрической возрастающей прогрессии $b_5=16b_1$, $b_3=8$. Найти b_1.

Решение. $b_5=b_1q^4$. Заменив по условию b_5, получим $16b_1=b_1q^4$, $q^4=16$, $q=2$ (при $q=-2$ прогрессия не является возрастающей).

$$b_3=b_1q^2=b_1\cdot 2^2=4b_1=8,\ b_1=8:4=2.$$

Ответ: $b_1=2$.

Пример 3. В геометрической прогрессии $b_1b_2=144$, $\frac{b_4}{b_3}=3$. Найти b_1.

Решение. Знаменатель прогрессии $q=\frac{b_4}{b_3}=3$.

$$b_1b_2=b_1(b_1q)=b_1^2\cdot 3=144,\ b_1^2=48,\ b_1=\pm\sqrt{48}=\pm 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $b_1=4\sqrt{3}$ или $b_1=-4\sqrt{3}$.

Пример 4. Найти сумму $1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$.

Решение. Данная сумма является суммой восьми первых членов геометрической прогрессии, где $b_1=1$, $q=3$.

По формуле $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ находим:

$$S_8=\frac{1\cdot(3^8-1)}{2}=\frac{6561-1}{2}=3280.$$

Ответ: 3280.

Пример 5*. Найти сумму $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$ $(x\neq 1)$, слагаемые которой являются последовательными членами геометрической прогрессии

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots .$$

Решение. Первый член прогрессии равен 1, а знаменатель равен x, x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n.

Для нахождения суммы n первых ее членов воспользуемся формулой:

$$S_n=\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Таким образом, $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$.

Задача 1*. В какую сумму превратится в сберегательном банке денежный вклад в a рублей через n лет, если каждый год прирост составляет p %?

Решение. В конце первого года вклад будет равен $a_1=a+\frac{p}{100}a=a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, в конце второго — $a_2=a_1+\frac{p}{100}a_1=a_1\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

Видим, что данная задача связана с понятием геометрической прогрессии, и заключаем, что через n лет вклад $a_n=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Задача 2*. Четыре числа образуют убывающую геометрическую прогрессию. Зная, что сумма крайних членов равна 27, а сумма средних членов равна 9, найти эту прогрессию.

Обозначим через b_1 первый член прогрессии, q — знаменатель прогрессии.

Используя условие задачи, составляем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1+b_1q^3=27,\\ b_1q+b_1q^2=9.\end{cases}$$

Отсюда $\frac{1-q+q^2}{q}=3$.

Решая это уравнение, получим $q=2\pm\sqrt{3}$. Условиям данной задачи удовлетворяет только $q=2-\sqrt{3}$, так как прогрессия должна быть убывающей, и потому $|q|<1$. Первый член прогрессии находим из соотношения $b_1(q+q^2)=9$, $b_1=\frac{3}{2}(9+5\sqrt{3})$.

4*. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма

Рассмотрим примеры бесконечных геометрических прогрессий:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots$ — знаменатель этой прогрессии равен $\frac{1}{2}$.

$1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \ldots$ — знаменатель этой прогрессии равен $-\frac{1}{2}$.

Бесконечную геометрическую прогрессию, у которой знаменатель $|q| < 1$, называют *бесконечно убывающей*.

Как известно, число $\frac{1}{3}$ обращается в бесконечную десятичную периодическую дробь 0,3333... .

Если разложить бесконечную десятичную дробь 0,3333... по разрядам, то получим сумму с бесконечным числом слагаемых:

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots .$$

Слагаемые в этой сумме являются членами геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ..., у которой знаменатель $q = 0,1$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = \frac{0,3\cdot((0,1)^n - 1)}{0,1-1} = \frac{0,3\cdot((0,1)^n - 1)}{-0,9} = \frac{(0,1)^n - 1}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{(0,1)^n}{3}.$$

При неограниченном увеличении числа слагаемых n выражение $(0,1)^n$ становится сколь угодно близким к нулю, а значит, и вся дробь $\frac{(0,1)^n}{3}$ неограниченно приближается к нулю. Действительно,

если $n = 2$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,01}{3} = \frac{1}{300}$;

если $n = 3$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,001}{3} = \frac{1}{3000}$;

если $n = 4$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,0001}{3} = \frac{1}{30\,000}$, и т. д.

При неограниченном увеличении n разность $\frac{1}{3} - \frac{(0,1)^n}{3}$ становится сколь угодно близкой к числу $\frac{1}{3}$, или, как говорят, стремится к числу $\frac{1}{3}$.

Таким образом, сумма n первых членов геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... при неограниченном увеличении n стремится к числу $\frac{1}{3}$. Это утверждение записывают в виде равенства

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Число $\frac{1}{3}$ называют *суммой* этой *бесконечной геометрической прогрессии*.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число, к которому стремится (→) сумма $\boldsymbol{n}$ первых членов этой прогрессии при $\boldsymbol{n} \to \infty$.

Для вывода формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots$$

воспользуемся формулой $S_n = b_1\frac{(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n$.

Так как $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, и поэтому $\frac{b_1}{1-q}q^n \to 0$.

Следовательно, $S_n \to \frac{b_1}{1-q}$ при $n \to \infty$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии 12, 4, $\frac{4}{3}$ ... .

У этой прогрессии $q = \frac{1}{3}$, значит, условие $|q| < 1$ выполнено. По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим:

$$S = \frac{12}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 18.$$

Задача 1. Дан квадрат, сторона которого равна 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. (рис. 32). Найти сумму площадей всех квадратов.

Р е ш е н и е. Площадь каждого следующего квадрата равна половине площади предыдущего. Таким образом, последовательность площадей квадратов является геометрической прогрессией, первый член которой равен 16, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Найдем сумму этой геометрической прогрессии: $S = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$.

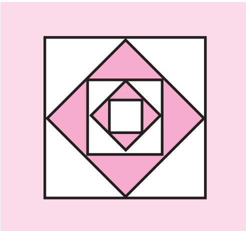


Рис. 32

Значит, сумма площадей всех квадратов равна 32 см^2.

Пример 2. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь $0,(15) = 0,151515\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

Р е ш е н и е. Имеем: $b_1 = 0,15$, $q = 0,01$.

По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим: $S = \frac{0,15}{1-0,01} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

О т в е т: $\frac{5}{33}$.

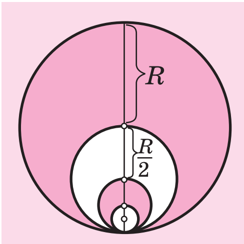


Рис. 33

Задача 2. На радиусе круга как на диаметре построен новый круг, затем на радиусе второго круга как на диаметре снова построен круг и т. д. (рис. 33). Докажите, что последовательность площадей этих кругов — бесконечно убывающая прогрессия. Найдите ее сумму, если ее радиус первого круга равен R.

Решение. Если R — радиус первого круга, то $\frac{R}{2}$ — радиус второго круга, $\frac{R}{4}$ — третьего, $\frac{R}{8}$ — четвертого и т. д.

Площади этих кругов образуют геометрическую прогрессию πR^2, $\frac{\pi R^2}{4}$, $\frac{\pi R^2}{16}$ со знаменателем $q = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$ и $b_1 = \pi R^2$. Итак, $q = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, прогрессия бесконечно убывающая.

По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ находим:

$$S = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\pi R^2}{3}.$$

Задача 3. В окружность, радиус которой равен 10 см, вписан правильный треугольник; в треугольник вписана окружность; в окружность снова вписан правильный треугольник и т. д. Найдите суммы длин окружностей и площадей кругов.

Решение. Из курса геометрии известно, что $a = 2r\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{2}R$, где a — сторона правильного треугольника, r — радиус окружности, вписанной в треугольник, R — радиус окружности, описанной около треугольника. Рассмотрим последовательность, членами которой являются числа, соответствующие длинам окружностей, вписанных в правильные треугольники. Нетрудно доказать, что эта последовательность — бесконечная геометрическая прогрессия, причем $|q| < 1$. Итак, $b_1 = 2\pi R$, $b_2 = 2\pi R \cdot \frac{1}{2}$, $b_3 = 2\pi R \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ и т. д. Найдем сумму всех членов этой прогрессии, получим $S = \frac{2\pi R}{1-0,5} = 4\pi R = 40\pi$, так как $R = 10$. Другая бесконечная геометрическая прогрессия составлена из чисел, соответствующих площадям кругов, вписанных в правильные треугольники. В этой прогрессии $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi R^2 \cdot \frac{1}{4}$,

$S_3 = \pi R^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $q = \frac{1}{4}$, $|q| < 1$, значит, можно найти сумму всех ее членов: $S = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{100\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{400\pi}{3}$.

Пример 3*. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots + \cos^{n-1}\alpha + \ldots$, $\alpha \in (0; \pi]$.

Решение. Знаменатель данной бесконечной геометрической прогрессии $q = \frac{\cos\alpha}{1} = \cos\alpha$. Прогрессия является бесконечно убывающей, если $|q| < 1$, т. е. $|\cos a| < 1$, что имеет место при $\alpha \neq \pi$. Не получим бесконечно убывающей геометрической прогрессии и при $\cos\alpha = 0$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При всех других значениях $\alpha \in [0; \pi]$ данная прогрессия будет бесконечно убывающей и ее сумма находится по формуле

$$S = \frac{a_1}{1-q};\ S = \frac{1}{1-\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{1-\cos\alpha}$, $\alpha \neq 90°$, $\alpha \neq 180°$.

?

1. Приведите пример числовой последовательности: а) конечной; б) бесконечной.

2. Приведите пример последовательности, заданной формулой n-го члена. Назовите какой-нибудь член этой последовательности.

3. Приведите пример последовательности, заданной рекуррентной формулой.

4. Какая последовательность называется арифметической прогрессией? Приведите пример.

5. Какая последовательность называется геометрической прогрессией? Приведите пример.

6. Запишите формулы n-го члена и суммы: а) арифметической; б) геометрической прогрессии.

Задания

Устные упражнения **165—174**.

165. В конечной последовательности (x_n): 3; 0; -3; -6; -9; -12 — назовите первый, третий, шестой члены.

166. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n = 3n - 1$. Найдите a_1, a_3, a_{10}.

167. Какая из последовательностей, заданных формулой n-го члена, является арифметической прогрессией: а) $x_n = 2n + 5$; б) $x_n = 3n\,(n + 2)$; в) $\alpha_n = \frac{n+1}{n+2}$?

168. Назовите первый член и разность арифметической прогрессии, заданной формулой n-го члена: $b_n = 15n - 4$.

169. Задана конечная последовательность: 2; −1; 5; −2; 9; −3; 15; −4. Найдите сумму: а) первых двух ее членов; б) первых пяти ее членов; в) всех ее членов.

170. В арифметической прогрессии (x_n) $x_1 = 5$, $x_{30} = 15$. Найдите сумму первых тридцати ее членов.

171. Является ли последовательность (x_n) геометрической прогрессией: а) 3; 3; 3; 3; 3; 3; б) 2; 0; 0; 0; 0; в) 3; 6; 12; 24; 48?

172. Назовите первый, третий и пятый члены последовательности, заданной формулой n-го члена: $x_n = 81 \cdot 3^{1-n}$. Будет ли эта последовательность геометрической прогрессией? Чему равна сумма первых трех членов этой последовательности?

173. Известно, что числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию. Является ли геометрической прогрессией последовательность $13a_1, 13a_2, \ldots$?

174. Первый член геометрической прогрессии отрицательный и знаменатель ее тоже отрицательный. Какие знаки у членов этой прогрессии?

175. Сколько раз используется цифра 1 в записи всех целых чисел от −50 до 50?

176. Напишите первые пять членов последовательности: а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = 50 - 7n$; в) $a_n = \frac{1}{n+1}$; г) $a_n = n^2$. Какие из этих последовательностей убывают, возрастают?

177. Напишите первые пять членов последовательности:

а) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$; в) $a_n = \frac{1}{2^n}$;

б) $a_n = 2^n$; г) $a_n = (-1)^{n+1}2^{n+1}$.

178. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Вычислите:

а) a_{15}, если $a_1 = 2$, $d = 3$; в) a_{18}, если $a_1 = -3$, $d = -2$;

б) a_{20}, если $a_1 = 3$, $d = 4$; г) a_{11}, если $a_1 = -2$, $d = -4$.

179. Найдите разность арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; в) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_7 = 6{,}5$;

б) $a_1 = -3$, $a_{25} = 45$; г) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$.

180. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии:

а) 1, 6, 11, 16, ...; в) −4, −6, −8, −10, ...;

б) 25, 21, 17, 13, ...; г) 1, −4, −9, −14, ...

181. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 4{,}2$ и $b_{10} = 15{,}9$.

182. Дана арифметическая прогрессия. Заполните таблицу в тетради:

№ п/п	a_1	d	n	a_n	S_n
1	7			3	20
2	2			20	77
3	8		7		14
4	−5		12		72

183. При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло ее дна через 5 с после начала падения.

184. Какое расстояние пройдет свободно падающее тело (по условию задачи **183**):

а) за седьмую секунду после начала падения;

б) за семь секунд после начала падения?

185. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (рис. 34). Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 120? Сколько потребуется шаров, чтобы составить треугольник из 30 рядов?

186. ***Последовательностью Фибоначчи*** называется последовательность, заданная рекуррентной формулой $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ и условиями $a_1 = a_2 = 1$.

а) Запишите первые 10 членов этой последовательности.

б) Докажите, что $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+3}$.

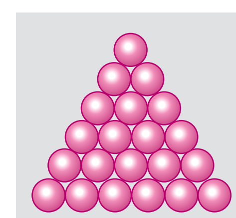


Рис. 34

187. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 6,\ q = 2$; в) $b_1 = -24,\ q = -1{,}5$;

б) $b_1 = -16,\ q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = 0{,}4,\ q = \sqrt{2}$.

188. Последовательность (c_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) знаменатель и третий ее член, если $c_1 = 8,\ c_2 = -16$;

б) знаменатель и четвертый ее член, если $c_2 = 2\sqrt{2},\ c_3 = 4$;

в) знаменатель и первый ее член, если $c_3 = 3\sqrt{3},\ c_4 = 27$.

189. Является ли арифметической или геометрической прогрессией последовательность (a_n), заданная условиями:

а) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 4a_n$; г) $a_1 = -8,\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$;

б) $a_1 = 8,\ a_{n+1} = 4 + a_n$; д) $a_1 = -10,\ a_{n+1} = a_n$;

в) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{4}$; е) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$?

Если последовательность — арифметическая прогрессия, то укажите ее разность, если геометрическая, то укажите ее знаменатель.

190. На опытном лесном участке ежегодный прирост древесины составляет 10 %. Какое количество древесины будет на участке через 6 лет, если ее первоначальное количество было равно $2{,}0 \cdot 10^4$ м^3?

191. Дан равносторонний треугольник со стороной 8 см. Из его высот построен второй треугольник. Из высот второго треугольника построен третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию, и найдите периметр шестого треугольника.

192. Часы с «кукушкой» устроены так, что «кукушка» кукует число целых часов и каждые полчаса. Сколько раз «кукушка» прокукует за сутки?

193. а) Найдите сумму всех нечетных чисел от 15 до 55. б) Дана последовательность 50, 43, 36, ... Найдите сумму положительных членов этой последовательности.

194. За сколько часов велосипедист проедет 90 км, если он проезжает за первый час 20 км, а за каждый последующий час на 2 км меньше?

195. В геометрической прогрессии первый член равен 0,25, а знаменатель равен 2. Найдите номер члена прогрессии, начиная с которого все последующие члены будут больше 200.

196. Древняя индийская легенда рассказывает, что изобретатель шахмат попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую — в два раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — еще в два раза больше, т. е. 4 зерна, и т. д. до 64 клетки. Сколько зерен должен был получить изобретатель шахмат?

197. В окружность вписан квадрат, а в него вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан второй квадрат, а в него — третья окружность и т. д. Докажите, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию.

198. Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Докажите, что последовательность площадей этих квадратов является геометрической прогрессией. Найдите площадь седьмого квадрата.

199. Четыре положительных числа составляют геометрическую прогрессию, причем $b_1 + b_2 = 9,\ b_3 + b_4 = 36$. Найдите эти числа.

200. Рост дрожжевых клеток происходит делением каждой клетки на две части. Сколько образовалось дрожжевых клеток после десятикратного его деления, если первоначально было a клеток?

201. Вычислите сумму:

а) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$; в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$;

б) $\frac{22}{100} + \frac{22}{10\,000} + \frac{22}{100\,000} + \ldots$; г) $100 - 10 + 1 - \ldots$.

202. Запишите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если ее сумма равна: а) 5; б) 0,25; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2} - 1$.

203. Представьте число 150 в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $q = \frac{1}{3}$; б) $q = -\frac{1}{5}$; в) $b_1 = 75$; г) $b_1 = 50$.

204. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $1 + \sin 30° + \sin^2 30° + \sin^3 30° + \ldots$;

б) $1 - \cos 30° + \cos^2 30° + \cos^3 30° + \ldots$.

205. В угол, мера которого равна 60°, в сторону вершины угла последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга

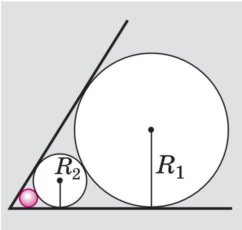


Рис. 35

(рис. 35). Радиус первой окружности равен R_1. Найдите радиусы R_2, R_3, ..., R_n, ... остальных окружностей и докажите, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

206. Второй член бесконечной геометрической прогрессии равен 18, а ее сумма равна 81. Найдите третий член.

207. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 2,01(0,6); б) 5,25(21); в) 0,00(1); г) 0,28(3).

208*. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}$; ...; б) 1; $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$; ... .

209*. Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены геометрической прогрессии:

а) $4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n$;
б) $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n-2}$, где $x \neq \pm 1$.

210*. При каком условии три положительных числа a, b и c будут одновременно соответственно первым, вторым и третьим членами арифметической и геометрической прогрессий?

211*. а) Три числа, не равные 0, — последовательные члены арифметической прогрессии, а их квадраты — члены геометрической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

б) Определите числа a_1, a_2, a_3 и a_4, если a_1, a_2 и a_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, а a_2, a_3 и a_4 — арифметической прогрессии и $a_1 + a_4 = 14$, $a_2 + a_3 = 12$.

212*. На стороне BC угла ABC откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые. Доказать, что длины отрезков этих прямых, концы которых лежат на сторонах угла, образуют арифметическую прогрессию.

213*. Докажите, что радиусы последовательно вписанных в острый угол окружностей, касающихся друг друга, образуют геометрическую прогрессию.

214*. Длины сторон некоторого треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти стороны, если периметр треугольника равен $2p$, а его площадь S.

215*. Выписаны две арифметические прогрессии. Если из каждого члена первой прогрессии вычесть соответствующий член второй прогрессии, то получится ли снова арифметическая прогрессия?

216*. Бассейн наполняют водой n насосов различной мощности. Первый насос, работая автономно, может наполнить бассейн за 2 ч, второй за 4 ч, ..., n-й за 2^n ч. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 ч 1 мин. Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 ч?

§ 5. Корни *n*-й степени

1. Корень *n*-й степени и его свойства

С понятием квадратного корня вы познакомились раньше. Напомним, что квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a, т. е. такое число x, которое удовлетворяет уравнению $x^2 = a$.

Квадратный корень называют также *корнем второй степени*.

Аналогично для любого натурального $n \geqslant 2$ вводится следующее определение.

***Корнем n-й степени** из числа **a** называется число, **n**-я степень которого равна **a**.*

Например, число −3 является кубическим корнем из числа −27, так как $(-3)^3 = -27$.

Число 3 является корнем четвертой степени из числа 81, так как $3^4 = 81$. Число −3 также является корнем четвертой степени из числа 81, так как $(-3)^4 = 81$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня **n**-й степени*. Это действие является обратным к возведению в n-ю степень.

При решении многих задач приходится находить корни уравнения

$$x^n = a,$$

где n — натуральное число.

Задача 1. Объем куба равен 125 дм². Найдите ребро куба.

Р е ш е н и е. Пусть ребро куба x (дм). Тогда объем куба равен x^3 (дм³). По условию $x^3 = 125$. Значит, $x = 5$ (дм).

Число $x = 5$ удовлетворяет уравнению $x^3 = 125$, так как $5^3 = 125$. Число 5 является *кубическим корнем*, или *корнем третьей степени*, из числа 125.

Задача 2. Первый член геометрической прогрессии равен 1, а седьмой 64. Найдите знаменатель прогрессии.

Р е ш е н и е. Знаменатель прогрессии q. Так как $b_1 = 1$, $b_7 = 64$, то по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ получаем: $64 = 1 \cdot q^6$, т. е. $q^6 = 64$. Следовательно, $q = 2$ или $q = -2$.

Число $q = 2$ удовлетворяет уравнению $q^6 = 64$, так как $2^6 = 64$. Это число является *корнем шестой степени* из числа 64. Число -2 также является корнем шестой степени из числа 64, так как $(-2)^6 = 64$.

Рассмотрим уравнение $x^n = a$ в случае, когда n — натуральное число, $n \geqslant 2$, a — любое неотрицательное число.

Докажем, что уравнение при $a > 0$ имеет единственный положительный корень.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существуют два различных положительных числа x_1 и x_2 таких, что $x_1^n = a$ и $x_2^n = a$. Тогда

$$x_1^n = x_2^n.$$

Но $x_1 \neq x_2$, а значит, одно из этих чисел больше другого. Пусть $x_1 > x_2$. Тогда $x_1^n > x_2^n$ (обоснуйте это), что противоречит равенству $x_1^n = x_2^n$.

Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $x^n = 0$. Это уравнение имеет только один корень $x = 0$.

Итак, при $a \geqslant 0$ и натуральном $n \geqslant 2$ существует только один неотрицательный корень n-й степени из числа a. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

О п р е д е л е н и е. **Арифметическим корнем натуральной степени ($n \geqslant 2$) из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

Например, числа 2 и -2 являются корнями четвертой степени из числа 16. При этом число 2 — арифметический корень четвертой степени из числа 16, число -2 не является арифметическим корнем.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$.

Число a называется подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Используя обозначение $\sqrt[n]{a}$, определение арифметического корня можно записать так: если $a \geqslant 0$ и n — натуральное число, $n \geqslant 2$, то:

$$1)\ \sqrt[n]{a} \geqslant 0; \qquad 2)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Например, $2 = \sqrt[5]{32}$, так как $2 > 0$ и $2^5 = 32$.

Из определения корня следует, что если $a \geqslant 0$, то

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Например, $\sqrt[9]{12^9} = 12$; $\sqrt[4]{0{,}4^4} = 0{,}4$.

Уравнение $x^n = a$ в случае, когда $a < 0$, n — нечетное натуральное число, имеет только один отрицательный корень. Этот корень обозначается, так же как и арифметический корень, символом $\sqrt[n]{a}$. Его называют корнем нечетной степени из отрицательного числа.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

Вообще,

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a},$$

или

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|\,a\,|},\ \text{где } a < 0,\ n = 2k + 1,\ k \in \boldsymbol{N}.$$

Арифметический корень натуральной степени обладает следующими свойствами.

Свойство 1. **Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и n — натуральное число, $n \geqslant 2$, то**

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

Свойство 2. **Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n — натуральное число, $n \geqslant 2$, то**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Свойство 3. **Если $a \geqslant 0$, n и m — натуральные числа, ($n \geqslant 2$), то**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (3)$$

Свойство 4. **Если $a \geqslant 0$, n и m — натуральные числа ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$), то**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \qquad (4)$$

Свойство 5. **Если n, k и m — натуральные числа $a \geqslant 0$, то**

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (5)$$

Докажем свойство 1.

Так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то обе части формулы (1) — неотрицательные числа. Для доказательства равенства (1) по определению арифметического корня достаточно убедиться в том, что n-я степень правой части равенства (1) равна ab.

В самом деле, по свойству натуральной степени произведения и определению корня натуральной степени получаем:

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

(Остальные свойства докажите самостоятельно.)

Пример 1. $\sqrt[4]{16\cdot 81} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{81} = 2\cdot 3 = 6.$

Пример 2. $\sqrt[3]{27\cdot 8\cdot 125} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{125} = 3\cdot 2\cdot 5 = 30.$

Пример 3. $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}.$

Пример 4. Сравнить значения выражений $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ и $\sqrt[6]{64}$.

Решение. $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$, $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$

Значения этих выражений равны, т. е.

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}.$$

Пример 5. Упростить выражение $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение. Внесем множитель 2 под знак квадратного корня: $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}}.$

По свойству 4 корня степени n имеем:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3}.$$

Применяя свойство 5 корня, получим:

$$\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$$

Итак, $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Пример 6. Решить уравнение $x^6 = 7$.

Решение. Это уравнение имеет два корня. Положительный корень есть положительное число, шестая степень которого равна 7, т. е. $\sqrt[6]{7}$. Отрицательный корень равен $-\sqrt[6]{7}$.

Ответ: $\pm\sqrt[6]{7}$.

Пример 7. Последовательность (b_n) — возрастающая геометрическая прогрессия, причем $b_1b_2b_3 = 729$, $\frac{b_5}{b_3} = 9$. Найти b_4.

Решение. $b_5 = b_3q^2$. Отсюда $q^2 = \frac{b_5}{b_3} = 9$. Тогда $q = 3$ или $q = -3$. По условию прогрессия возрастающая. Поэтому $q = 3$ (при $q < 0$ знаки членов прогрессии чередуются).

$$b_1b_2b_3 = b_1(b_1\cdot q)(b_1\cdot q^2) = b_1^3\cdot q^3 = b_1^3\cdot 3^3 = 27\,b_1^3.$$

По условию $27\,b_1^3 = 729$. Отсюда $b_1^3 = 27$, $b_1 = \sqrt[3]{27} = 3.$

По формуле n-го члена $b_4 = b_1q^3 = 3\cdot 3^3 = 3\cdot 27 = 81.$

Ответ: 81.

Пример 8*. Выполнить указанные действия и упростить:

а) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2.$

Решение. *I способ.*

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)} + 3 - \sqrt{5} =$$
$$= 6 - 2\sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 2\cdot 2 = 2;$$

II способ.

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} - \sqrt{\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}}\right)^2 =$$
$$\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot 1+1^2}{2}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\cdot 1+1^2}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{2}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2}}\right)^2 =$$
$$\left(\frac{\left|\sqrt{5}+1\right|}{\sqrt{2}} - \frac{\left|\sqrt{5}-1\right|}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

б) $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}} + \sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}.$

(Решите эту задачу самостоятельно.)

Отметим следующий факт: если натуральное число не есть n-я ($n \geqslant 2$) степень некоторого натурального числа, то она есть n-я степень иррационального числа, т. е. оно не может быть n-й степенью рационального числа.

Например, следующие корни: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{7}$; $\sqrt[6]{10}$ — числа иррациональные.

2*. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

Рассмотрим вначале функцию $y = \sqrt[n]{x}$ при $n = 2$, т. е. функцию $y = \sqrt{x}$.

График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке 36.

Функция $y = \sqrt{x}$:

определена при $x \geqslant 0$;

положительна при $x > 0$ и равна нулю при $x = 0$;

возрастает на всей области определения;

принимает все неотрицательные значения.

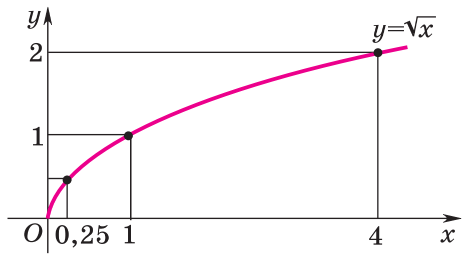


Рис. 36

Такими же свойствами обладает функция $y = \sqrt[n]{x}$ при любом четном натуральном n, например $y = \sqrt[4]{x}$ (рис. 37, *а*).

Рассмотрим теперь функцию $y = \sqrt[3]{x}$. В отличие от функции $y = \sqrt{x}$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена на всей числовой оси, т. е. на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

При $x < 0$ значения функции $y = \sqrt[3]{x}$ отрицательны, а при $x > 0$ — положительны; если $x = 0$, то $y = 0$.

График функции $y = \sqrt[3]{x}$ изображен на рисунке 37, *б*. Этот график симметричен относительно начала координат.

Вообще, функция, заданная формулой $y = \sqrt[n]{x}$, при нечетном n определена на множестве всех действительных чисел, при четном n — на множестве неотрицательных чисел. Для любого натурального n эта функция является возрастающей.

Пример 1. Указать два последовательных целых числа, между которыми заключено число: а) $\sqrt[3]{3{,}5}$; б) $\sqrt[4]{9}$.

Решение. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ является возрастающей. Опираясь на этот факт, находим:

а) $1 < \sqrt[3]{3{,}5} < 2$; действительно, так как $1 < 3{,}5 < 8$, то $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3{,}5} < \sqrt[3]{8}$;

б) решите самостоятельно.

Пример 2. Построить график функции $y = \sqrt[4]{(0{,}5x-3)^4}$.

Решение. $\sqrt[4]{(0{,}5x-3)^4} = |0{,}5x-3|$. Строим график $y = 0{,}5x - 3$ и часть графика, расположенную ниже Ox, отображаем симметрично относительно оси Ox (рис. 38, *а*).

Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt{x^3}$.

Решение. Область определения этой функции — $[0; \infty)$, так как $x \geqslant 0$; также и $y \geqslant 0$.

График состоит из одной ветви, расположен в I четверти и имеет такой вид (рис. 38, *б*).

Уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня, называют *иррациональным*.

Примеры: $x - \sqrt{6x+5} = 0$; $3\sqrt{x-1} - 1 = 0$;

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}.$$

Уравнение $x\sqrt{3} - 6 = 0$ не является иррациональным. Объясните почему.

При решении иррациональных уравнений, как правило, необходима проверка найденных корней.

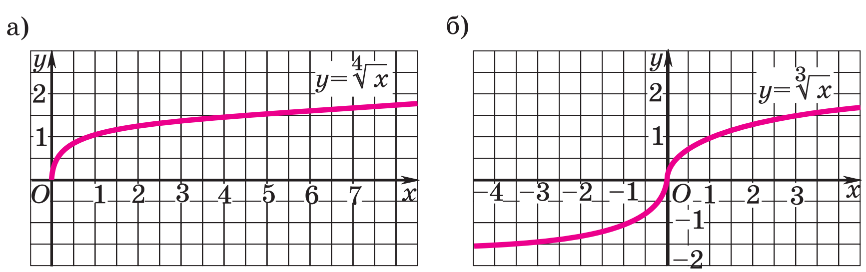


Рис. 37

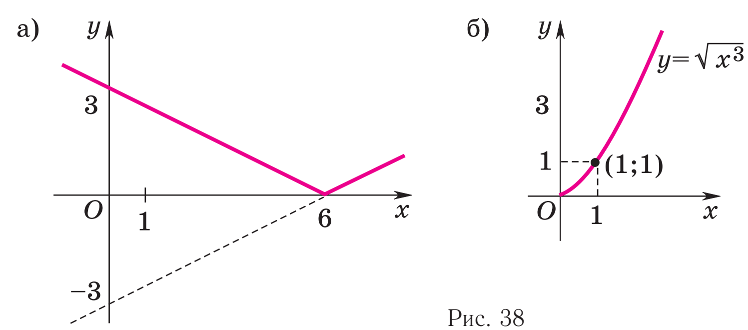


Рис. 38

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+2} = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+2}$ и возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$x-1=3x+2,\ 2x=-3,\ x=-\frac{3}{2}.$$

Проверка. При подстановке найденного значения x в заданное уравнение получаем, что выражение $\sqrt{x-1}$ не имеет смысла. Значит, $-\frac{3}{2}$ не является корнем заданного уравнения.

Ответ: нет корней.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} = x+1$.

Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$2x+5=x^2+2x+1,$$

или $x^2=4$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2$.

Проверка. При $x=2$ имеем: $\sqrt{2\cdot 2+5} = 2+1$ — верное равенство. При $x=-2$ получаем неверное равенство $\sqrt{2(-2)+5} = -2+1$.

Ответ: $x=2$.

Пример 6*. Решить уравнение $x^2-4x-\sqrt{x}+2=0$. Заменив уравнение равносильным $x^2-4x+2=\sqrt{x}$ и построив графики функций $y=x^2-4x+2$ и $y=\sqrt{x}$ (рис. 39), можно сделать вывод о том, что уравнение $x^2-4x-\sqrt{x}+2=0$ имеет два действительных корня: 0,5 — приближенное значение одного корня, 4 — точное значение другого корня (проверьте подстановкой!).

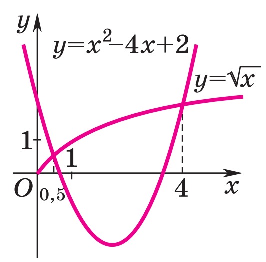


Рис. 39

Неравенство, в котором переменная содержится под знаком корня, называют *иррациональным*.

При решении иррациональных неравенств используют те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений. Однако при решении неравенств проверка подстановкой неосуществима, так как обычно решения неравенства образуют числовой промежуток. Это значит, что при решении неравенств необходимо следить за тем, чтобы выполняемые преобразования приводили к равносильному неравенству.

Пример 7. Решить неравенство $\sqrt{3x-5} < 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $0 \leqslant 3x-5 < 4$, решая которое, получим $5 \leqslant 3x < 9$, $1\frac{2}{3} \leqslant x < 3$.

Ответ: $\left[1\frac{2}{3};\ 3\right)$.

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{5-x}$.

Решение.

$$\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 5-x \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 5-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0{,}5, \\ x \leqslant 5, \\ x \geqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow (2 \leqslant x \leqslant 5).$$

Ответ: [2; 5].

Пример 9. Найти середину промежутка, являющегося множеством решений неравенства $(x-3)\sqrt{3-\sqrt{x}} \geqslant 0$.

Решение.

$$(x-3)\sqrt{3-\sqrt{x}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\sqrt{x} \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leqslant 3, \\ x \geqslant 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow (3 \leqslant x \leqslant 9).$$

Середина промежутка [3; 9] — число 6.

Ответ: 6.

Пример 10. Найти длину промежутка, на котором выполняется неравенство $x - 4\sqrt{x-5} \leqslant 0$.

Указание. Обозначим $\sqrt{x} = t$, где $t \geqslant 0$, тогда $t^2-4t-5 \leqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 5$.

Тогда $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 5$, $0 \leqslant x \leqslant 25$. Длина промежутка [0; 25] равна 25 единицам.

Ответ: 25 ед.

?

1. При каких значениях a имеет смысл выражение $\sqrt[n]{a}$?
2. Дайте определение арифметического корня n-й степени. Запишите это определение, используя знак арифметического корня.
3. Сколько решений имеет уравнение $x^n = a$ при четном n и нечетном n? Приведите примеры.
4. Сформулируйте свойства арифметического корня n-й степени.
5. Является ли функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ убывающей?

Задания

Устные упражнения **217—223**.

217. Какие из выражений $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{-2}$; $\sqrt[4]{-5}$ имеют смысл?

218. Вычислите: $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[5]{-1}$; $\sqrt[6]{0}$.

219. Докажите, что:

а) число 5 есть арифметический корень третьей степени из 125;

б) число 0 есть арифметический корень восьмой степени из 0;

в) число -1 не является арифметическим корнем девятой степени из -1;

г) число 7 не является арифметическим квадратным корнем из 50.

220. Выразите через арифметический корень выражение:

а) $\sqrt[3]{-10}$; б) $\sqrt[5]{-48}$; в) $\sqrt[19]{-2}$.

221. Докажите, что $\sqrt[3]{-a}$ является арифметическим корнем лишь при $a \leqslant 0$, а $\sqrt[3]{a^2}$ — при любом a.

222. Каковы корни уравнения:

а) $x^4 = 2$; б) $x^2 = 7$; в) $x^6 = a$, где $a > 0$?

223. Вычислите: а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{0{,}3} \cdot \sqrt[3]{90}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$.

224. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{9x}$; б) $\sqrt[3]{5y^3}$; в) $\sqrt[4]{3a^8}$; г) $\sqrt[4]{2b^4}$, где $b \leqslant 0$.

225. Упростите выражение: а) $\sqrt{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; в) $\sqrt[4]{5^2}$; г) $\sqrt[6]{a^3}$.

226. Упростите выражение: а) $\sqrt[8]{b^4}$, где $b \geqslant 0$; б) $\sqrt[8]{b^4}$, где $b \leqslant 0$;

227. Найдите ошибку в рассуждениях:

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = -1, \text{ т. е. } 1 = -1.$$

228. Вычислите:

а) $\sqrt{441}$; в) $\sqrt[10]{0}$; д) $\sqrt[5]{-32}$; ж) $\sqrt[3]{-1}$;

б) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[3]{-64}$; е) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$; з) $\sqrt[20]{-0}$.

229. Внесите множитель под знак корня:

а) $x\sqrt{3}$, где $x \geqslant 0$; г) $-2\sqrt[5]{3b^2}$;

б) $y\sqrt{5}$, где $y < 0$; д) $c\sqrt[4]{3c}$;

в) $3\sqrt[3]{2a}$; е) $m\sqrt[6]{7m^2}$, где $m < 0$.

230. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{2x^2}$, где $x \geqslant 0$; в) $\sqrt[4]{32b^5}$;

б) $\sqrt{18y^2}$, где $y < 0$; г) $\sqrt[4]{162c^6}$, где $c < 0$.

231. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$; е) $\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 0{,}064}$; л) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 2 \cdot 32}$;

б) $\sqrt[3]{27 \cdot 125 \cdot 8}$; ж) $\sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 16}$; м) $\sqrt[3]{-32 \cdot \dfrac{2}{27}}$;

в) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 64}$; з) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 0{,}5^{15}}$; н) $\sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{32}$;

г) $\sqrt[5]{-32 \cdot (-243)}$; и) $\sqrt[4]{\dfrac{2^8}{3^4}}$; о) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$;

д) $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot (-27)}$; к) $\sqrt[4]{10\,000 \cdot 3^8}$; п) $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{100}$.

232. Выполните действия:

а) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{3}}$; ж) $\sqrt{\dfrac{1}{9}x^2y^6}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}}$; з) $\sqrt[3]{\dfrac{27a^9x^6}{64y^3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; е) $\sqrt{100a^4}$; и) $0{,}5\sqrt[5]{-32a^5x^{10}}$.

233. Упростите выражение:

а) $\sqrt{49a^2b^2}$; в) $\sqrt[8]{16a^4b^{12}}$; д) $\sqrt[6]{\dfrac{8a^3b^9}{27x^3y^6}}$;

б) $\sqrt[12]{a^{20}b^8}$; г) $\sqrt[6]{27x^3y^{12}}$; е) $\sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}}$.

234. Упростите:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$.

235. Решите уравнение:

а) $x^5 = 8$; г) $x^{10} + 6 = 0$;

б) $x^7 = -5$; д) $0{,}03x^3 + 0{,}81 = 0$;

в) $x^4 - 19 = 0$; е) $16x^4 - 625 = 0$.

236. Объем куба равен V. Выразите:

а) длину a ребра куба через его объем;

б) площадь S грани куба через его объем;

в) площадь поверхности P куба через его объем.

237. Упростите:

а) $\frac{3a}{5b}\sqrt{\frac{25b^2}{9a^2}}$; б) $\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{5x^3}{3a^2}}$; в*) $\sqrt[4]{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2}}$.

238. Решите уравнение и неравенства:

а) $\sqrt[3]{x}=5$, $\sqrt[3]{x}>5$, $\sqrt[3]{x}<5$; б) $\sqrt[4]{x}=2$, $\sqrt[4]{x}>2$, $\sqrt[4]{x}<2$.

239. Определите знак разности:

а) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{2}$; в) $\sqrt[k]{3}-\sqrt[2k]{3}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; г) $\sqrt[k]{\frac{1}{2}}-\sqrt[2k]{\frac{1}{2}}$.

240. Оцените значение выражения $\sqrt[3]{x}$, зная, что;

а) $0<x<1$; б) $1<x<1000$; в) $1000<x<10^{10}$.

241. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\sqrt[4]{5-2x}$; в) $y=\sqrt[3]{8x+1}$.

242. Пользуясь графиками функций $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, решите уравнение и неравенства:

а) $\sqrt{x}=x$, $\sqrt{x}<x$, $\sqrt{x}>x$; б) $\sqrt[3]{x}=x$, $\sqrt[3]{x}<x$, $\sqrt[3]{x}>x$.

243. Постройте график функции:

а) $y=-\sqrt{x}$; в) $y=\sqrt{-x}$;

б) $y=-\sqrt[3]{x}$; г) $y=\sqrt[3]{-x}$.

244. Докажите, что функция f — четная, и постройте ее график, если:

а) $f(x)=\sqrt{|x|}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$.

245. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[8]{x-2}$; в) $\sqrt[3]{x+5}$; д) $\sqrt[4]{y^2-5x+6}$;

б) $\sqrt[4]{\frac{9-x}{5}}$; г) $\sqrt[8]{(a-5)(a-2)}$; е) $\sqrt[12]{-b^2+6b-8}$?

246. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-5}=5-x$; в) $\sqrt[3]{2x-3}=3$;

б) $\frac{10}{\sqrt{x-5}}=\sqrt{x}$; г*) $\sqrt[5]{28+\sqrt{x-1}}=2$.

247. Решите неравенство:

а) $\sqrt{6-x}>0$; в) $10-\sqrt{x-1}>3$;

б) $\sqrt{4x+12}>1$; г*) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}>0$;

248. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$; в) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

б) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}$; г*) $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$.

249. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\frac{64\cdot 27}{125}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$;

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16\cdot 625}}$; г) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

250. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), у которой:

а) $b_1=3$, $b_6=96$; в) $b_1=-\frac{1}{3}$, $b_8=7{,}29$;

б) $b_1=0{,}2$, $b_{11}=204{,}8$; г) $b_1=1$, $b_{10}=3$.

251. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt[3]{0{,}3}$, $\sqrt[5]{0{,}2}$.

252*. Докажите, что функция, заданная формулой $y=\sqrt[n]{x}$ в промежутке $[0;+\infty)$, является возрастающей.

Указание. Нужно доказать, что для любых $x_2>x_1\geqslant 0$ верно неравенство $\sqrt[n]{x_2}>\sqrt[n]{x_1}$.

253. Что больше и почему:

а) $\sqrt[9]{13}-\sqrt[9]{7}$ или $\sqrt[9]{12}-\sqrt[9]{8}$;

б) $\sqrt[10]{15}-\sqrt[10]{5}$ или $\sqrt[10]{14}-\sqrt[10]{7}$?

254. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}-x=0$; д) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=0$;

б) $x-\sqrt{x}-2=0$; е*) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}-3=0$;

в) $2x-\sqrt{x}-6=0$; ж*) $x-\sqrt{x-5}-7=0$.

г) $x-\sqrt{x+1}-1=0$;

255. Найдите значение выражения:

а) $-0{,}5\sqrt[10]{1024}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}\cdot\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

б) $-\frac{2}{3}\sqrt[7]{-2187}$; д) $\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[7]{0{,}1^7}$;

в) $1{,}5\sqrt[9]{512}$; е) $\sqrt[4]{16^{-2}}\cdot\sqrt[3]{0{,}125^3}$.

256. Вычислите с точностью до 0,1:

а) $\left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$;

б) $\left(6\sqrt{6}-\sqrt[8]{\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{6}$.

257*. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

258*. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{x^3}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=-\frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

259*. Решите неравенство: а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\sin 30°$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqslant\cos 60°$.

260*. Докажите неравенство:

а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$, если $a>0$, $b>0$;

б) $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;

в) $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$.

261*. Решите уравнение:

а) $x^2-3x-4\sqrt{x}-3=0$;

б) $x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0$.

262*. Ученик должен был извлечь кубический корень из данного действительного числа, результат умножить на 4, а затем к полученному произведению прибавить 60. Однако вместо каждой операции ученик проделал обратную ей и получил правильный ответ. Какой?

§ 6*. Правила комбинаторики. Понятие вероятности события

1. Комбинаторные задачи

Комбинаторными называют задачи на определение числа возможных конечных множеств, которые можно составить из данных элементов.

Раздел математики, занимающийся такими задачами, называется к о м б и н а т о р и к о й.

Решим несколько задач.

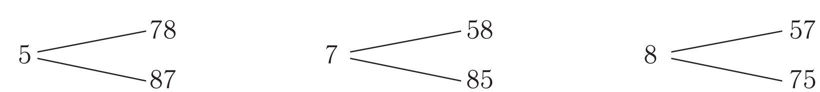
Задача 1. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 7 и 9 так, чтобы в записи числа каждая из них содержалась только один раз?

Р е ш е н и е этой задачи — два числа 79 и 97. Здесь мы имели множество, состоящее из двух элементов: {7; 9}. Запись искомых чисел зависит от того, в каком порядке взяты элементы этого множества.

Отметим, что каждое такое расположение элементов двухэлементного множества называется *перестановкой из двух элементов*. Обозначим число этих перестановок через P_2. Тогда имеем $P_2=2$.

Задача 2. Используя цифры 5, 7, 8, составить все трехзначные числа, в записи каждого из которых каждая из них входит только один раз. Сколько таких чисел существует?

Р е ш е н и е. Имеется множество из трех элементов: {5; 7; 8}. Припишем к каждой из этих цифр все возможные двузначные числа, составленные из двух оставшихся цифр.



Получилось шесть чисел. Таким образом, $P_3=6$.

Заметим, что в решении этой задачи показан способ нахождения числа перестановок P_3 из трех элементов с использованием P_2, а именно: $P_3=3P_2$. Убедитесь самостоятельно, что $P_4=4P_3$.

Рассмотрим теперь **общую задачу**. Пусть дано множество из n элементов. Найти формулу, выражающую P_n через n.

Имеем $P_1=1$

$P_2=2P_1$

$P_3=3P_2$

$P_4=4P_3$.

....

Аналогично, $P_{n-1} = (n-1)\,P_{n-2}$

$$P_n = n\,P_{n-1}$$

Перемножив левые и правые части всех этих равенств, получим

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots P_{n-1} \cdot P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_{n-1},$$

откуда $\boldsymbol{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}$.

Напомним, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n = n!$ (читается n-факториал). Таким образом, $\boldsymbol{P_n = n!}$

2. Основные правила комбинаторики

Пусть даны два множества: $M_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $M_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Рассмотрим две задачи:

1) Найти число способов, которыми можно выбрать элемент из множества M_1 или из множества M_2.

2) Найти число способов, которыми можно выбрать пару элементов a и b по одному из каждого множества.

Задача 1. В одной вазе лежит 5 яблок, а в другой — 8 мандаринов. Сколькими способами можно выбрать яблоко или мандарин?

Решение. Одно яблоко можно выбрать пятью способами, а один мандарин — другими восемью способами. Тогда яблоко или мандарин можно выбрать $N = 5 + 8 = 13$ способами.

Задача 2. В магазине имеется три вида ручек и два вида карандашей. Сколько различных комплектов, содержащих ручку и карандаш, можно приобрести в этом магазине?

Решение. Обозначим ручки буквами a, b, c, а карандаши буквами x, y. Если же выбрана ручка a, то можно составить комплекты ax и ay. Если же выбрана ручка b, то получим комплекты bx и by. И наконец, если выбрана ручка c, то, присоединяя к ней карандаши x и y, получим комплекты cx и cy. Таким образом, после каждого выбора ручки карандаш можно выбрать двумя способами. Следовательно, всего можно выбрать $N = 3 \cdot 2 = 6$ различных комплектов.

Решение этих задач приводит нас к следующим основным правилам комбинаторики.

Правило суммы. **Если объект a может быть выбран m способами, а объект b может быть выбран другими n способами, то выбор одного элемента a или b может быть осуществлен $m + n$ способами.**

Правило произведения. **Если объект a может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект b может быть выбран n способами, то выбор объектов a и b в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.**

Эти правила могут быть распространены на случай выбора из трех и более множеств.

Задача 3. Сколькими способами можно составить расписание уроков из 6 разных предметов?

Решение. На первый урок можно поставить один из 6 предметов (это можно сделать 6 способами), на второй — один из оставшихся 5 предметов (это можно сделать 5 способами) и т. д. Всего (по правилу произведения) число способов равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$; другими словами, число способов составить расписание из 6 разных уроков равно $6!$

Ответ: 720 способами.

Рассмотрим задачу на совместное применение правил суммы и произведения.

Задача 4. Сколько не более чем трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числах не повторялись?

Решение. Нам надо узнать, сколько можно составить однозначных, двузначных или трехзначных чисел. По правилу суммы их будет $N = N_1 + N_2 + N_3$. Однозначных чисел будет 5, значит, $N_1 = 5$. Подсчитаем число различных двузначных чисел. На месте десятков можно поставить любую из пяти цифр. После каждого такого выбора на месте единиц можно поставить любую из четырех оставшихся цифр, так как цифры в числе не должны повторяться. По правилу произведения $N_2 = 5 \cdot 4 = 20$. Рассуждая аналогично, получим число различных трехзначных чисел: $N_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Следовательно, $N = 5 + 20 + 60 = 85$.

Ответ: 85 чисел.

Задача 5. Сколько имеется натуральных чисел, меньших 10^5, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

Решение. Если разбить построение такого числа на шаги, на каждом из которых выбирается одна цифра, то для разных чисел число шагов будет разным. С помощью правила произведения нетрудно найти по отдельности число однозначных, двузначных, трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи: 9, 9^2, 9^3, 9^4, 9^5. Значит, всего есть $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 66\,429$ натуральных чисел, меньших 10^5, с различными соседними цифрами.

3. Понятие вероятности события

Решим несколько задач.

Задача 1. Из коробки, в которой лежат красный, желтый и зеленый шары, наугад извлекают один. С какой долей уверенности можно предположить, что извлеченный из коробки шар окажется красным?

Решение. Рассуждаем. Множество исходов этого испытания состоит из трех элементов: a_1 — извлечен красный шар; a_2 — извлечен желтый шар; a_3 — извлечен зеленый шар. Случайно из коробки может быть извлечен любой из этих шаров. Следовательно, доля уверенности выбора красного шара равна $\frac{1}{3}$.

Задача 2. На прием к доктору пришли четыре пациента, только один из которых болен. Доктор утверждает, что может определить больного, лишь осмотрев языки всех пациентов. Какова вероятность того, что доктор поставит правильный диагноз?

Решение. Назовем проверку или тест (в данном случае обследование группы из четырех человек) испытанием. В данном испытании два возможных исхода, а именно: правильный диагноз и неправильный диагноз. Каждый исход назовем элементарным событием. Правильный выбор назовем успехом или благоприятным исходом, неправильный — неудачей или неблагоприятным исходом. Говорят, что вероятность P случайного события A равна $\frac{m}{n}$, где n — число всех исходов, m — число исходов испытаний, благоприятствующих свершению события A.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Во всяком испытании благоприятные и неблагоприятные исходы являются взаимоисключающими (непересекающимися) событиями, так как в любом испытании свершается одно событие или другое, но не оба. В нашей задаче вероятность определения доктором правильного диагноза равна $\frac{1}{4}$. Эта дробь выражает отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов.

Вероятность может принимать любое значение от 0 до 1. Чем ближе вероятность к 1, тем больше уверенность, что событие свершится. Вероятность события, которое не может произойти, равна 0. Вероятность того, что произойдет одно из двух взаимоисключающих событий, получается сложением вероятностей осуществления каждого из них. Если, например, A и B обозначают два взаимоисключающих события, то $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$, причем $P(A) + P(B) \leqslant 1$. В истории с нашим доктором $P(\text{успеха}) = \frac{1}{4}$. $P(\text{неудачи}) = \frac{3}{4}$ (объясните почему). Сумма этих вероятностей равна 1, поскольку они взаимоисключающие и образуют полный набор событий, так как представляют все возможные исходы испытаний.

Задача 3. В тестовом задании даны пять ответов, лишь один из которых правильный. Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ окажется правильным? Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ окажется неправильным? (Решите самостоятельно.)

Задача 4*. Число выбирается наугад из множества нечетных двузначных чисел. Какова вероятность того, что выбранное число делится на 9?

Решение. Всего двузначных нечетных чисел 45. Обозначим через A — элементарное событие «взятое наугад число делится на 9». Найдем число исходов испытаний благоприятствующих свершению события A — оно равно числу всех нечетных двузначных чисел, которые делятся на 9. Таких чисел пять (проверьте самостоятельно). $P(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

?
1. Какие задачи называются комбинаторными? Приведите пример.
2. Сформулируйте правила комбинаторики и приведите примеры на их применение.
3. Что такое вероятность события? Приведите пример.

Задания

Устные упражнения **263—266**.

263. В темной кладовой лежат ботинки одного размера: 10 пар черных и 10 пар коричневых. Найдите наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета. (Считать, что в темноте нельзя отличить цвет ботинка и левый от правого.)

264. Как от куска материи в $\frac{2}{3}$ метра отрезать полметра, не имея под руками сантиметровой ленты?

265. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20 числа этого месяца?

266. Квадрат числа состоит из цифр 0; 2; 3; 5. Найдите это число.

267. а) Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

б) 13 учеников обменялись рукопожатиями. Сколько всего произведено рукопожатий?

268. а) В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 9 человек при условии, что все они должны ехать в разных вагонах?

б) В пассажирском поезде 13 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 13 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

269. Сколькими способами можно составить список из 9 учеников?

270. а) Сколько можно составить пятизначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры числа были различны?

б) Сколько различных хорд определяют 5 точек, лежащих на одной окружности?

271. Сколько диагоналей имеет:

а) выпуклый пятиугольник;

б) выпуклый двенадцатиугольник;

в) выпуклый n-угольник?

272. В кружке юных математиков 25 членов. Необходимо избрать председателя кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту четверку, если каждый из 25 может занимать только один пост?

273. Встречаются две команды шашистов A и B. По условиям соревнований каждый участник одной команды играет по одной партии с каждым участником другой команды. Общее число предстоящих партий в 4 раза больше числа всех игроков в обеих командах. Однако из-за болезни два игрока не смогли явиться на матч, в связи с чем число всех сыгранных в матче партий оказалось на 17 меньше предполагавшегося. Сколько игроков выступило в матче за команду A, если известно, что в ней было меньше игроков, чем в команде B?

274. Лотерея состоит из 1000 билетов, среди них 150 выигрышных. Вынимается произвольный (обычно говорят «наугад») билет из 1000. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

275. В полученной партии деталей оказалось 200 деталей 1-го сорта, 100 деталей 2-го и 50 деталей 3-го сорта. Наудачу вынимается одна из деталей. Чему равны вероятности событий: получить деталь 1-го, 2-го или 3-го сорта?

276. Бросается игральная кость. Чему равны вероятности следующих событий: A — выпадет грань с 6 очками, B — выпадет грань с четным числом очков, C — выпадет грань с числом очков, делящимся на 3?

277. Монету подкидывают дважды. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?

278. За круглым столом случайным образом рассаживаются: а) 10 человек; б) n человек ($n > 2$). Какова вероятность того, что двое названных из них окажутся рядом?

279. Подойдя к двери, человек, у которого n ключей, начинает последовательно подбирать ключи. Какова вероятность того, что с k-й попытки он дверь откроет, если известно, что только один ключ подходит к замку?

Повторение главы III

Исторические сведения

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были еще у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать. Например, в древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 г. до н. э.) приводится такая задача: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялась $\frac{1}{8}$ меры».

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (III в. до н. э.). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида «Начала» (III в. до н. э.).

Большой вклад в развитие математики в XIX в. внес немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс. Современники называли его «королем математиков». Математическое дарование Гаусса обнаружилось еще в раннем детстве. Вспоминая детские годы, Гаусс в шутку говорил о себе: «Я научился считать раньше, чем говорить».

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

В возрасте семи лет он стал посещать школу, в которой быстро обнаружились математические способности мальчика. В классе было около ста учащихся. Как-то ребята очень расшалились, и, чтобы их чем-то занять, учитель предложил им сосчитать сумму 100 чисел: 81 297 + 81 495 + + 81 693 + … + 100 899, где каждое слагаемое на 198 больше предыдущего числа.

Как только учитель кончил писать задание, Гаусс положил свою грифельную доску ему на стол. Дети считали долго, но никто, кроме Гаусса, не дал верного ответа.

Высшее образование Гаусс получил в Геттингенском университете. Позднее (1807 г.) он в течение почти 50 лет занимал в этом университете кафедру математики и астрономии. Еще на студенческой скамье в возрасте 19 лет Гаусс сделал замечательное открытие: он полностью выяснил, в каких случаях возможно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой. В частности, решив уравнение $x^{17} - 1 = 0$, он дал построение правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки.

Знак $\sqrt{}$ для обозначения действия извлечения корня введен в математику Рудольфом в 1525 г. Про знак $\sqrt{}$ обычно указывается, что он происходит от буквы r. Раньше просто писали целое слово «корень» (по-латински radix), которое затем было сокращено до одной первой буквы, постепенно принявшей вид знака $\sqrt{}$.

Контрольные вопросы

1. Какая последовательность называется арифметической прогрессией? Приведите пример.

2. Какая последовательность называется геометрической прогрессией? Приведите пример.

3. Чему равны: а) разность двух соседних членов арифметической прогрессии; б) отношение двух соседних членов геометрической прогрессии?

4. Как задать: а) арифметическую; б) геометрическую прогрессию?

5. Запишите формулу n-го члена: а) арифметической; б) геометрической прогрессии.

6. Запишите формулу суммы n членов: а) арифметической; б) геометрической прогрессии.

7. Что такой корень n-й степени из числа b?

8. Для каких действительных чисел существует корень четной степени n?

9. Сколько существует корней четной степени n из данного числа?

10. Для каких действительных чисел существует корень нечетной степени n?

11. Сколько существует корней нечетной степени n из данного числа?

12. Что называется арифметическим корнем n-й степени из числа a?

13. Сколько существует арифметических корней n-й степени из данного числа?

14. Каковы свойства арифметических корней n-й степени?

15*. Как можно начертить график функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$?

16*. Докажите, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ возрастающая.

Задания

280. Могут ли являться членами арифметической прогрессии числа: а) $\sqrt{2}$, 2 и $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{3}$, 2 и $\sqrt{8}$; в) 2, 21 и 59?

281. Докажите, что для любых чисел a и b значения выражений $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$ и $(a - b)^2$ образуют арифметическую прогрессию.

282. Докажите, что если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2 и c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

283. Периметр треугольника равен 24 см, причем длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли определить длину хотя бы одной из сторон? Какие целые значения могут принимать длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах?

284. Углы некоторого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из них равен 60°.

285. Основания трапеции равны 11 см и 26 см. Боковая сторона трапеции разделена на 10 равных отрезков и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключенных между боковыми сторонами трапеции.

286. а) В арифметической прогрессии $a_8 = 130$ и $a_{12} = 166$. Найдите формулу n-го члена.

Решение. Находим: $a_8 = a_1 + 7d$, $a_{12} = a_1 + 11d$.

Подставив данные значения a_8 и a_{12}, получим систему уравнений относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$4d = 36,\ d = 9.$$

Следовательно, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Ответ: $a_n = 9n + 58$.

б) Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 153?

Решение. Натуральный ряд чисел — арифметическая прогрессия с разностью $d = 1$. По условию $a = 1$, $S_n = 153$. Используя формулу

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n,$$

получим уравнение относительно n:

$$153 = \frac{2\cdot 1 + (n-1)\cdot 1}{2}n,$$

откуда $306 = 2n + (n - 1)n$.

Преобразуя уравнение, получим:

$$n^2 + n - 306 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1\pm 35}{2},$$

$$n_1 = -18,\ n_2 = 17.$$

Число слагаемых не может быть отрицательным, поэтому $n = 17$.
Ответ: $n = 17$.

287. В арифметической прогрессии:

а) $S_{10} = 100$; $S_{30} = 900$; найдите S_{40};
б) $S_{15} = S_{25} = 150$; найдите S_{30}.

288. Могут ли три последовательных члена геометрической прогрессии составлять арифметическую прогрессию?

289. Докажите, что для любых чисел a и b $(|a| \neq |b|)$ значения выражений $(a + b)^2$, $a^2 - b^2$ и $(a - b)^2$ образуют геометрическую прогрессию.

290. а) Образуют ли в указанном порядке значения $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ геометрическую прогрессию, если $\alpha = 30°$?

б) Образуют ли в указанном порядке значения $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ геометрическую прогрессию, если $\alpha = 30°$?

291. В геометрической прогрессии (b_n):

а) $q = 0{,}5$, $b_n = 2$, $S_n = 254$; найдите b_1 и n;
б) $q = 3$, $b_n = 567$, $S_n = 847$; найдите b_1 и n;
в) $q = 2$, $n = 8$, $S_n = 765$; найдите b_1 и b_n;
г) $b_1 = 2$, $b_n = \frac{1}{8}$, $S_n = 3\frac{7}{8}$; найдите q и n.

292. Докажите, что если q — знаменатель геометрической прогрессии (c_n), то $\frac{c_n}{c_m} = q^{n-m}$.

293. *Старинная задача* (из папируса Райнда, около 2000 лет до н. э.).

У семи лиц есть по 7 кошек. Каждая кошка съела по 7 мышей; каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя; из каждого колоса можно вырастить по 7 мер зерна. Сколько мер зерна спасают эти кошки?

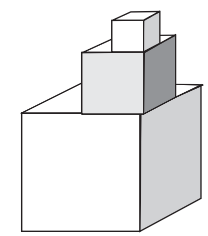
294*. а) Определите арифметическую прогрессию с первым членом 24, если известно, что первый, пятый и одиннадцатый ее члены составляют геометрическую прогрессию.

б) Определите геометрическую прогрессию a_1, a_2, a_3, a_4 и арифметическую прогрессию b_1, b_2, b_3, b_4, если известно, что

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 1, \\ a_2 - b_2 = 8, \\ a_3 - b_3 = 27, \\ a_4 - b_4 = 64. \end{cases}$$

295*. На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 40). Найдите высоту получившейся фигуры и площадь ее поверхности.

Рис. 40



296*. а) Могут ли стороны прямоугольного треугольника образовать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли стороны прямоугольного треугольника образовать арифметическую прогрессию, все члены которой выражаются иррациональными числами?

в) Найдите длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, которые образуют геометрическую прогрессию, причем произведение этих чисел равно 216.

297. Решите уравнение $$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1, \quad (1)$$
где a — параметр.

Решение. Корень уравнения (1) должен удовлетворять условиям $x^2 + ax - 2a \geqslant 0$, $x + 1 \geqslant 0$.

Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение $x^2 + ax - 2a = (x + 1)^2$, любой корень которого удовлетворяет условию $x^2 + ax - 2a \geqslant 0$, так как $(x + 1)^2 \geqslant 0$. Отсюда следует, что уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+ax-2a=(x+1)^2 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a-2)x=2a+1 \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

При $a=2$ она решений не имеет, при $a \neq 2$ получим: $\begin{cases} x=\dfrac{2a+1}{a-2}, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$

Решив неравенство $\dfrac{2a+1}{a-2} \geqslant -1$, найдем, что уравнение (1) имеет один корень при любом $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $x=\dfrac{2a+1}{a-2}$ при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$; нет решений при $a \in \left(\dfrac{1}{3};\ 2\right]$.

298. Вычислите:

а) $\sqrt{\dfrac{16}{81}} \cdot \sqrt{(-23)^2} : \sqrt[3]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}} \cdot \sqrt{(-21)^2} : \sqrt{36 \cdot 25}$.

299. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^{14}b^6}$, где $a>0$, $b<0$; г) $\sqrt{4x^2-8x+4}$, если $x<1$;

б) $x\sqrt[3]{\dfrac{8}{x^2}}$; д) $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^2}}$;

в) $\sqrt{-81a^3}$; е)* $\sqrt{18-8\sqrt{2}}$.

Решение. а) $\sqrt{a^{14}b^6} = \sqrt{(a^7)^2 \cdot (b^3)^2} = \sqrt{(a^7)^2} \cdot \sqrt{(b^3)^2} =$
$= \left|a^7\right| \cdot \left|b^3\right| = a^7(-b^3) = -a^7b^3$.

300. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{10+\sqrt{84}} \cdot \sqrt[4]{10-\sqrt{84}}$; в) $\sqrt[4]{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$;

б) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$; г) $\sqrt[3]{12-\sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12+\sqrt{19}}$.

301. Сравните:

а) $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ и $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; в) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}}$ и $\sqrt[3]{7}$.

302*. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1,25}}$; б) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[10]{25}$.

303*. Решите уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

304*. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+3+\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{9}}$.

305*. а) В одном кинозале на m стульев меньше, чем в другом, количество же рядов в обоих залах одинаково. Если бы в первом зале помещали в каждом ряду по стольку стульев, сколько имеется в каждом ряду второго зала, а во втором, наоборот, по стольку, сколько в первом, то во втором зале получилось бы вдвое больше рядов, чем в первом. Сколько стульев в первом кинозале?

б) Два самолета вылетают одновременно друг другу навстречу из пунктов A и B и летят с постоянными скоростями. К моменту встречи первый самолет пролетает на m километров меньше второго и на перелет от пункта встречи до пункта B тратит вдвое больше времени, чем второй на перелет от пункта встречи до пункта A. Найдите расстояние от пункта A до места встречи.

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. Последовательность (a_n) начинается так: 5; 15; ... . Запишите первые пять членов этой последовательности, если она является: а) арифметической прогрессией; б) геометрической прогрессией.

2. Найдите:

а) разность арифметической прогрессии (b_n), если $b_1=92,8$ и $b_{17}=72$;

б) знаменатель геометрической прогрессии (c_n), если $c_1=\dfrac{5}{64}$ и $c_3=\dfrac{5}{16}$.

3. В цирке в одном из секторов для зрителей устанавливали кресла так, что каждый последующий ряд содержал на одно место больше, чем нижний. Сколько сидений установлено в секторе, если в первом ряду 8 кресел, а рядов всего 22?

4. Докажите, что последовательность, заданная формулой $c_n=\dfrac{6^{n-1}}{18}$, является геометрической прогрессией. Найдите c_1 и S_4.

5. Сумма трех чисел, которые являются последовательными членами арифметической прогрессии, равна 18. Если первое и третье числа увеличить на 1 и 2 соответственно, то полученные числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите первоначальные числа.

Вариант 2

1. Укажите, какие из выражений $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[4]{16}$ имеют смысл и найдите их значение.

2. В шашки играют на доске, разделенной на 64 квадрата. В игре участвуют 12 белых и 12 черных шашек. Если взять наугад одну из шашек, то какова вероятность того, что шашка окажется белой?

3. Сумма третьего и восьмого членов арифметической прогрессии равна 13. Найдите сумму 10 первых членов этой прогрессии.

4. Решите уравнение $4 + 6 + 8 + ... + x = 130$.

5. Дан равносторонний треугольник со стороной, равной 12 см. От него прямой, проходящей через середины боковых сторон, отсечен второй треугольник, от второго треугольника таким же образом отсечен третий и т. д. Найдите сумму площадей всех таких треугольников.

Глава IV

Повторение курса алгебры

§ 7. Упражнения для повторения курса алгебры

1. Числовые выражения

306. Устные упражнения.

1) Какие из приведенных чисел являются рациональными: 0,1; $\sqrt{5}$; $\sin 30°$; $\sqrt{16}$; 1,(25); $\sin 45°$; 0?

2) Может ли сумма и разность двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Приведите примеры.

3) Чем отличаются десятичные записи чисел рационального и иррационального?

4) Вычислите: $3\frac{1}{1286} \cdot 12$.

5) Вычислите: 21^2; 19^2; $19 \cdot 21$, $47^2 - 46^2$.

6) Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^0$; б) $(-0,5)^2$; в) $\left(8-6\left(\frac{2}{3}\right)^0\right)^{-2}$.

7) Что больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?

8) Вычислите: $\mathrm{tg}\,20°$; $\mathrm{tg}\,45°$; $\mathrm{tg}\,70°$.

307. Правильно ли выполнены задания? Вычислите значения выражений:

а) $3x \cdot 3y$ при $x = 2\frac{3}{7}$, $y = 4\frac{2}{3}$.

$3x \cdot 3y = 3xy = \frac{3 \cdot 17 \cdot 14}{1 \cdot 7 \cdot 3} = 34$.

Ответ: 34.

б) $5x - 5y$, если $x = 3{,}4$, $y = 1\frac{3}{4}$.

$5(x-y) = 5\left(3{,}4 - 1\frac{3}{4}\right) = 5\left(3\frac{4}{10} - 1\frac{3}{4}\right) = 5 \cdot 2\frac{8-15}{20} = 5 \cdot \left(-2\frac{7}{20}\right) =$
$= -10\frac{7}{4} = -11\frac{3}{4}$.

Ответ: $-11\frac{3}{4}$.

в) $x - y(x+y)$ при $x = -5$, $y = 4$.
1) $-5 - 4 = -9$; 2) $-5 + 4 = -1$; 3) $-9(-1) = 9$.
Ответ: 9.

г) $7c - (1 - 3c)$, если $c = -0{,}56$.
$-0{,}56 \cdot 7 - (1 - 3(-0{,}56)) = -3{,}92 - 1 + 1{,}68 = -4{,}92 + 1{,}68 =$
$= -3{,}24$.
Ответ: $-3{,}24$.

д) $(x^2 + y) - (x^2 - y)$ при $x = 1{,}7$, $y = -3$.
$1{,}7^2 - 3 - (1{,}7^2 + 3) = 28{,}9 - 3 - (18{,}9 + 3) = 25{,}9 - 31{,}8 = -6$.
Ответ: -6.

е) $(y+1)^2 - (y+4)(y-4)$ при $x = 3{,}5$.
$(y+1)^2 - (y+4)(y-4) = y^2 + 1 - y^2 + 16 = 17$.
Ответ: значение выражения равно 17 независимо от значения y.

308. Вычислите:

а) $\frac{2{,}7 \cdot 37{,}8 + 2{,}7 \cdot 62{,}2}{9 \cdot 54{,}1 - 9 \cdot 44{,}1}$;

б) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$, если $x = 14$;

в) $\frac{1{,}2 \cdot 87{,}5 - 1{,}2 \cdot 85{,}5}{4 \cdot 6{,}7 - 4 \cdot 13{,}3}$;

г) $\frac{1}{3}y + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}$, если $y = 12$;

д) $x^2 + 2x + 201\,\mathrm{tg}\,0°$ при $x = 69$;

е) $y^2 - 2y + 1001\sin 90°$ при $y = 71$.

309. Найдите все дроби с однозначным знаменателем, каждая из которых больше $\frac{7}{9}$, но меньше $\frac{8}{9}$.

310. Автолюбитель проехал 55 % всего пути, что составило 110 км. Найдите весь путь.

311. Дороже или дешевле будет стоить товар, если цену на него увеличить на 13 %, а потом новую цену уменьшить на 13 %?

312. а) В книге 160 страниц. В первый день ученик прочитал 7,5 % книги, а во второй — 25 % оставшейся части. Сколько страниц ему осталось прочитать?

б) В поселке 28 % жителей — женщины, 25 % — мужчины, остальные 940 — дети. Сколько женщин в поселке?

313. а) Замените дробь $\frac{6}{11}$ десятичной дробью с двумя знаками после запятой. Найдите абсолютную и относительную погрешности приближенного значения.

б) Проверьте, является ли число 0,17 приближенным значением дроби $\frac{3}{17}$ с точностью до 0,01.

314. Вычислите:

а) $2{,}5^5 \cdot 4^4$; б) $\frac{28^5}{4^4 \cdot 7^5}$; в) $\frac{3^7 \cdot 27}{(3^4)^3}$; г) $\frac{9^4 \cdot 4^9}{27^3 (4^2)^3}$.

315. Сократите дробь:

а) $\frac{2^8 - 2^5}{4^6 - 4^5}$; в) $\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$; д) $\frac{112\sqrt{8} - 18\sqrt{20}}{12\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}$;

б) $\frac{6^4 + 6^3}{7^4 - 7^3}$; г) $\frac{6 + \sqrt{6}}{\sqrt{30} + \sqrt{5}}$; е) $\frac{144\sqrt{8} - \sqrt{200}}{12\sqrt{32} + \sqrt{2}}$.

316. Вычислите:

а) $(0{,}1)^3 \cdot 5^3 \cdot 16\,(-1{,}25)^2$; в) $10^3 \cdot (-0{,}5)^2 \cdot 12{,}5^2\,(1{,}6)^3$;

б) $\frac{0{,}04^{-2} \cdot 125^4 \cdot 0{,}2^{-1}}{4 \cdot 25^8}$; г) $\frac{3^{-10} \cdot 7^{-5} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^8 \cdot 49}$.

317. Что больше $\frac{19^{10} + 1}{19^{11} - 1}$ или $\frac{19^{11} + 1}{19^{12} - 1}$?

318. Верно ли выполнены действия:

а) $\sqrt{16\frac{4}{9}} = 4\frac{2}{3}$;

б) $\sqrt{\frac{9}{25} - \frac{16}{121}} = \frac{3}{5} - \frac{4}{11} = \frac{13}{55}$;

в) $\sqrt{5^2} + \sqrt{(-3)^2} = 5 + (-3) = 2$;

г) $\sqrt{5{,}76} + \sqrt{6{,}76} = 5$?

319. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\dfrac{25^2-24^2}{21{,}5^2-14{,}5^2}}$; в) $\sqrt{\dfrac{8}{12{,}5}}\cdot\sqrt{|-21|^2}:\sqrt{36\cdot 25^{-2}}$;

б) $\sqrt[4]{\dfrac{5\frac{4}{9}\cdot 2\frac{14}{25}}{\frac{9}{16}\cdot 5^2}}$; г) $\sqrt{\dfrac{1{,}6}{8{,}1}}\cdot\sqrt{|-23|^2}\cdot\sqrt{8^{-1}\cdot 27^{-1}\cdot 6^{-1}}$.

320. Упростите выражение:

а) $10\sqrt{0{,}4}-0{,}5\sqrt{160}+3\sqrt{1\frac{1}{9}}$;

б) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{15}\right)^2-6\sqrt{10}$;

в) $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

г) $5\sqrt{0{,}6}-0{,}5\sqrt{60}+2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

д) $\left(3\sqrt{7}+2\sqrt{2}\right)^2-10\sqrt{14}$;

е) $\sqrt{\left(1-4\sqrt{6}\right)^2}-2\sqrt{6}$.

321. Докажите равенство $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\right)=\sqrt{22+12\sqrt{2}}$.

322. Выполните действия и округлите результат до единиц (*в, г*):

а) $\left(2^{-1}\cdot\sqrt{12}+0{,}(3)\cdot\sqrt{75}\right)\sqrt{3}$; в) $0{,}5\left(6\sqrt{8}-8\sqrt{5}+\sqrt{4{,}5}\right)\cdot\sqrt{6}$;

б) $\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\cdot\left(0{,}(4)\cdot\sqrt{12}-\sqrt{48}\right)$; г) $8\left(4\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{0{,}375}$.

323. Что меньше:

а) $2\sqrt{5}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}$; б) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-1}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$?

324. Что больше:

а) $2{,}5\sqrt{5}$ или $3{,}5\sqrt{3}$; в) $\sqrt{100}+\sqrt{2}$ или $\sqrt{200}$;

б) $0{,}3\sqrt{2}$ или $0{,}1\sqrt{6}$; г) $\sqrt{0{,}01}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{0{,}03}$?

325. Из двух двоек и знаков действий составьте числовое выражение, значение которого:

а) больше 0, но меньше 1;
б) больше 2, но меньше 3.

326. Что больше:

а) $\dfrac{(-2{,}2)^0-(0{,}25)^{-1}}{\cos 135°}$ или $\dfrac{(-2{,}1)^0+(0{,}(11))^{-1}}{\operatorname{tg} 135°}$;

б) $\dfrac{17^0-(0{,}(3))^{-2}}{\sin 120°}$ или $\dfrac{(0{,}04)^{-1}-(-0{,}2)^0}{\sin 30°}$;

в*) $4+\sqrt{7}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ или 2?

327. а) Вычислите сумму десяти первых членов геометрической прогрессии 1, $\sqrt{2}$, 2, ...

б) В геометрической прогрессии пятый член равен 16, а шестой член равен 32. Вычислите сумму десяти первых членов этой прогрессии.

328. Найдите значение выражения и округлите до 0,1:

а) $\dfrac{\sin 135°}{\operatorname{tg} 30°}$; б) $\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°}+\operatorname{tg} 45°$; в) $\cos 0°-\dfrac{\sin 60°}{\operatorname{ctg} 135°}$.

2. Алгебраические выражения

329. Устные упражнения.

1) Упростите и найдите значение выражения $\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}$.

2) При каких значениях a верно равенство $\sqrt{64-16a+a^2}=a-8$?

3) Разложите на множители выражение a^6-b^6, где $a>0$ и $b>0$, несколькими способами.

4) При каких значениях x данные равенства являются тождествами:

а) $(x-3)^0=1$; б) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}$?

5) Сократите дробь $\dfrac{0{,}99(x-y)}{9\sqrt{x}-9\sqrt{y}}$.

6) Является ли тождеством равенство:

а) $3(a-2b)=3a-6b$; в) $4(c-1)+4=4c$;

б) $2|x-y|+2x=2y$; г) $3a\cdot b-3ab=0$?

330. а) Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, если $a_n = 3n - 4$. Найдите сумму ее первых 20 членов.

б) Докажите, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, если $b_n = \frac{2}{3^{n+1}}$. Найдите сумму ее первых пяти членов.

331. Запишите многочлен в виде произведения трех двучленов:

а) $x^3 - 3x^2 - 10x + 30$; б) $x^3 + 4x^2 - 8x - 32$.

332. Запишите выражение в виде дроби: $x^{-1} + x^{-2} + x^{-8} + x^{-4}$.

333. а) Упростите выражение $\frac{4}{y+2^2} - \frac{3}{y-2^2} + \frac{10}{y^2-4^2}$ и вычислите его значение при $y = 2^{-2}$.

б) Упростите выражение $\frac{4}{c-3^{-1}} + \frac{3}{c+3^{-1}} - \frac{5}{c^2-3^{-2}}$ и вычислите его значение при $c = 2^{-3}$.

334. Является ли тождеством равенство:

а) $(xy^{-2} - x^{-1}) : (x^{-1} + y^{-1}) = 1 - \frac{y}{x}$;

б) $(c^4 + c^2 + 1)^{-1} = \frac{1}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)}$?

335. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-4}{2x^2-7x+6}$; б) $\frac{3x^2-13x+4}{9x^2-1}$.

336. Докажите тождество:

а) $\frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{1}{3a+2} = \frac{18a}{27a^3+8}$;

б) $\frac{4}{1-a} - \left(\frac{2a+2}{3-a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a+9}{a^2+2a+1} + \frac{2a}{1-a^2}\right) = 0$.

337. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) : \left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$;

б*) $\frac{(x^4-y^4)x^{-2}y^{-2}}{(1+x^{-2}y^2)(1-2xy^{-1}+x^2y^{-2})}$.

338. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2x}{x-7} + \frac{7x}{x^2-14x+49}\right) : \frac{2x-7}{x^2-49} - \frac{7(x+7)}{x-7}$;

б) $\left(\frac{2}{4-x^2} - \frac{2}{(x-2)^2}\right) \cdot \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{2}{x+2}$.

339. Упростите выражение:

а) $\left(-\frac{2a^8b^3}{c^7}\right)^5 \cdot \left(\frac{4a^{10}b^4}{c^9}\right)^{-4}$; б) $\left(-\frac{9x^7}{a^{12}y^{-6}}\right)^2 : \left(-\frac{a^8x^{-5}}{3y^4}\right)^{-3}$.

340. Является ли тождеством равенство:

а) $|c| + |p| = |c+p|$;

б) $|c| - |p| = |c-p|$;

в) $c - |c| = 0$;

г) $|c|c^{-1} = 1$;

д) $|x^2+y| = x^2 + |y|$;

е) $|x^2+\sqrt{y}| = x^2 + \sqrt{y}$;

ж) $\sqrt{x^{-2}} + y^2 = x^{-1} + y^2$;

з) $\sqrt{(x^2-11x+30)^{-2}} = ((x-5)(x-6))^{-1}$?

341. Верно ли при любых значениях x равенство:

а) $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(2-x)^2} = 1$; б) $\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = 0$?

342. Упростите выражение:

а) $5\sqrt{p} - 3\sqrt{4p} + 2\sqrt{9p}$, где $p \geqslant 0$;

б) $3\sqrt{c} - 4\sqrt{c} - 5\sqrt{c} - \sqrt{4c}$, где $c \geqslant 0$.

в) $\left(\frac{1}{9}\sqrt{20x} + \sqrt{\frac{245x}{81}} - \sqrt{\frac{45x}{49}}\right) : \frac{\sqrt{20x}}{7}$;

г*) $\frac{x-2}{4} \cdot \sqrt{\frac{64y^2}{x^2-4x+4}}$, где $x < 2$, $y \in \boldsymbol{R}$;

д*) $5a^2b\sqrt{\frac{1}{a^3b}} - 2b\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{1}{b}\sqrt{4ab^3} + 3a^3\sqrt{\frac{b}{a^5}}$.

343. Выполните действия:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right) \cdot \left(\frac{a+1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{2(1+\sqrt{c})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{c})} - \frac{c^2+2}{1-c^3}\right) \cdot (c^2 + c + 1)\cos^{-1} 180°$;

в) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} \cdot \sin^{-2} 90°$.

344. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)^{-1} + \operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$;

в*) $\frac{\sin^{-4}\alpha - \cos^{-4}\alpha}{\sin^{-2}\alpha - \cos^{-2}\alpha}$;

г*) $\sqrt{1-\cos^2\alpha} \cdot \sin^{-1}\alpha$.

345*. Докажите тождество:

$$\frac{1}{(c-1)(c-2)}+\frac{1}{(c-2)(c-3)}+\frac{1}{(c-3)(c-4)}=\frac{3}{(c-1)(c-4)}.$$

346*. Упростите выражение $(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)$.

347. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(a+b)^3$; б*) $(a+b)^4$; в*) $(a-b)^5$.

348. Преобразуйте в произведение двух многочленов:

а) x^6-y^3; в*) a^5+b^5;

б) a^3-b^3; г*) a^4+b^4.

349*. При каких значениях a, b, c, d равенство является тождеством:

а) $5x^3-32x^2+75x-71=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$;
б) $4x^3-10x^2+13x+100=ax^3+b(x+2)^2-c(x-2)-d$?

350*. Найдите все натуральные числа t такие, при которых дробь:
а) $\frac{t^2-t+3}{t+1}$; б) $\frac{2t^2-3t+2}{2t-1}$ — целое число.

3. Уравнения. Неравенства

351. Устные упражнения.

1) При каких значениях a верно равенство $\sqrt[3]{a}=a$?

2) При каких значениях m один из корней уравнения $x^2+3x+m(m-1)=0$ равен 0?

3) При каком значении k разность корней уравнения $x^2+4x+k=0$ равна нулю?

4) Решите уравнение $(x-2)\sqrt{x-5}=0$.

5) Докажите, что выражения $1+\sin x$ и $1-\cos x$ неотрицательны при любом x.

6) Имеет ли решения и сколько система уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ y=2x;\end{cases}$ в) $\begin{cases}y=\dfrac{2}{x},\\ y=-x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x+y=1,\\ 2x+y=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ x-4=0?\end{cases}$

7) При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{6x-12}$; б) $\sqrt{-6-2x}$; в) $\sqrt{x^2-2x+1}$?

352. Найдите ошибки в решениях. Решите уравнение:

а) $3-(4x+2)=10x+8$.
$3-(4x+2)=10x+8$; $3-4x-2=10x+8$;
$-4x-10x=8+2-3$; $-14x=7$; $x=-14:7=-2$.
Ответ: -2.

б) $3x(x-1)-1=6x-7$.
$3x(x-1)-1=6x-7$; $3x(x-1)=6x-7+1$;
$3x(x-1)=6x-6$; $3x(x-1)=6(x-1)$; $3x=6$; $x=2$.
Ответ: 2.

в) $10{,}2:3x=13{,}6:4x$.
$10{,}2:3x=13{,}6:4x$; отсюда $3{,}4:x=3{,}4:x$; $x=1$.
Ответ: 1.

353. Решите уравнение:

а) $5^{-1}\cdot(3x-1)-2^{-1}\cdot(x-1)=2$; в) $0{,}01x\cdot1{,}5\cdot10^3=18$;
б) $4^{-2}\cdot(2x+1)+2^{-2}\cdot(x+1)=3$; г) $10^3\cdot10^{-2}\cdot6{,}6x=69$.

354. Решите неравенство:

а) $\frac{2{,}78-2x}{0{,}75}\leqslant 4$; в*) $\frac{5x^2+3|x|}{5}<1+\frac{2x^2-1}{2}$;

б) $2x-\frac{3x-1}{3}<\frac{31}{41}$; г*) $\frac{4x^2-|x|}{4}-1<\frac{3x^2-4}{3}$.

355. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{1:45}=\frac{14+17{,}5}{7:30}$; б) $\frac{1:15+3:4}{x}=\frac{8:15}{20+2{,}5}$.

356. а) Найдите наибольшее целое число p, при котором корень уравнения $5x+2=5p$ меньше -2.

б) Найдите наименьшее число c, $c\in\boldsymbol{Z}$, при котором корень уравнения $7(x-c)=3$ не меньше 2.

357. Решите уравнение:

а) $4x^2+x=x$; д) $2x-1=\frac{6}{x}$;

б) $5x^2-x=x$; е) $x+2{,}5=\frac{6}{x}$;

в) $\frac{4x^2+1}{x}=1$; ж*) $\frac{c(x-c)}{p}-\frac{p(p-x)}{c}=x$ (относительно x).

г) $\frac{5x^2-x}{x}=1$;

358. а) Найдите наименьшее целое число, которое является решением неравенства
$$3(x-2) < 6x + \operatorname{tg} 45°.$$

б) Найдите наибольшее целое число, которое является решением неравенства
$$4(x-1) > 2\operatorname{ctg} 45° + 7x.$$

359. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2-4x+4}+\frac{x-5}{2x-4}=5^0$;

б) $\frac{x-2}{3x+3}+\frac{3}{x^2+2x+1}=12^{-1}$;

в) $\frac{1}{x}+\frac{12}{x(3-x)}=\frac{3x-5}{3-x}$.

360. Верно ли неравенство:

а) $\sin 45° + \sin 30° > 1$; б) $\cos 45° + \cos 30° > 1$?

361. Что больше:

$(\sin 15° - \sin 75°) \cdot \cos 15°$ или $(\cos 15° - \cos 75°) \cdot \sin 15°$?

362. Сравните с нулем:

а) $(\operatorname{tg} 30° - \sin 60°)(\sin 136° - \operatorname{tg} 136°)$;
б) $(\cos 30° - \operatorname{tg} 60°)(\operatorname{tg} 151° - \sin 151°)$.

363. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\cos 60°$; в) $\frac{4}{\sqrt{x}}=\operatorname{tg} 135°$.

б) $\frac{2}{\sqrt{x}}=\sin 150°$;

364. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен:

а) $4+\sqrt{3}$; б) $3+\sqrt{5}$.

365. При каких значениях k уравнение: а) $5x^2 + k + 1 = 0$ не имеет корней; б) $2x^2 - kx + 2 = 0$ имеет два разных корня?

366. Решите уравнение:

а) $|x-7| = 2x - 5$; в) $|x|+|x+1| = 3$.

б) $|x+8| = -x + 6$;

367. Решите неравенство:

а) $-4 \leqslant 0{,}5x - 4 \leqslant 4$; г) $0{,}5|x+2| \leqslant 18$;
б) $-5 \leqslant 2x - 0{,}5 \leqslant 5$; д) $|x+5| \geqslant 1$;
в) $0{,}5|x| - 12 > 0$; е*) $|x| - |x+3| < 5$.

368. Найдите:

а) середину промежутка, на котором выполняется неравенство $\left|\frac{x-1}{-3}\right| \leqslant 1$;

б) длину промежутка, на котором выполняется неравенство $\frac{|x|-5}{-3} \geqslant 0$.

369. а) При каких значениях x выражение $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+6x+5}$ имеет смысл?

б) Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{4-x}}{x^2+2x-3}$.

370. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x+y=4,\\8x-y=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}4x-y=2,\\8x=4+2y;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x=8-y,\\14x+7y=11;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=(x+4)^2+(y-8)^2,\\x+y=35.\end{cases}$

371. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=5,\\xy=14;\end{cases}$ в*) $\begin{cases}x^2-5y^2=-1,\\3x+7y^2=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x=2y;\end{cases}$ г*) $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7,\\x^2+y^2+xy=133.\end{cases}$

372. Найдите все решения неравенства $\frac{3x-5}{x} \geqslant 2$, которые принадлежат промежутку $(0; 6]$.

373. Найдите все решения неравенства $\frac{4x+7}{x} \geqslant 2$, которые принадлежат промежутку $[-5; 0)$.

374. Решите неравенство:

а) $\frac{8x+2}{1+4x} < 2$; в) $\frac{x^2-1}{x-1} > \frac{5}{6}$;

б) $\frac{10x-2}{1-2x} > -5$; г) $\frac{x-1}{x^2-1} < 5^{-1}$.

375. При каких значениях переменной выражение неотрицательно:

а) $\frac{(x^3)^2(-x^6)^4}{(-x^2)^6}$; б) $\frac{(-y^3)^7(-y^4)^5}{(-y^2)^9}$?

376. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5(x+1)-x > 2x+2, \\ 4(x+1)-2 \leqslant 2(x+1)-x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+x-6 < 0, \\ -x^2+2x+3 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2(x-1)-3 < 5(2x-1)-7x, \\ 3(x+1)-2 \leqslant 6(x-1)+7x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+x-6 \geqslant 0, \\ x^2-5x-24 \leqslant 0. \end{cases}$

377. Решите уравнение:

а) $t^4 - 11t^2 + 30 = 0$; г) $c^3 + 11c^2 + 28c = 0$;
б) $3t^4 - 28t^2 + 9 = 0$; д) $k^4 - 2k^2 = 0$;
в) $t^6 - 1 = 0$; е*) $x^3 - 12x + 16 = 0$.

378*. Решите уравнение относительно переменной x:

а) $x^2 + 2(a-b)x - 4ab = 0$;
б) $(a-b)x^2 - bx - a = 0$.

379*. Найдите все значения c, при которых корни уравнения $3x^2 + 2x + c = 0$ относятся как $2:3$.

380*. Докажите, что если:

а) $a > b > 0$, то $\left(a\sqrt{a}\right)^{-1} - \left(b\sqrt{b}\right)^{-1} < a - b$;

б) $a > 0$, $b > 0$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{a^2b^{-1}} + \sqrt{b^2a^{-1}}$.

381*. Докажите, что дробь $\frac{n^4-3n^2-1}{n^4-n^2-2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$ правильная.

382*. Решите неравенство $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x-\frac{1}{x}\right) + 3 < 0$.

383*. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x+5} > x + 3$; в) $\sqrt{x+18} < -x + 2$;

б) $\frac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{x+6} > 0$; г) $\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant \sqrt{x-3}$.

4. Функции

384. Устные упражнения.

1) Как по графику функции выяснить, является ли функция четной или нечетной?

2) Существует ли линейная функция, которая является: а) четной; б) нечетной? Приведите пример.

3) При каких натуральных значениях n функция $y = x^n$ является возрастающей?

4) Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{-1}$.

5) При каких значениях k график функции $y = kx - 1$ параллелен оси абсцисс?

385. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 11 - x$; б) $y = \sqrt{13-x^2}$; в) $y = \sqrt{\frac{17-3x}{\sqrt{18-3x}}}$.

386. Постройте график какой-либо функции, определенной для всех $x \in [-4; 5]$ и имеющей два нуля — числа 0,5 и 1,2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

387. Приведите пример функции, которая:

а) возрастает на всей области определения;
б) убывает на всей области определения;
в) возрастает на множестве положительных чисел;
г) убывает на множестве отрицательных чисел.

388. Известно, что график функции $y = kx - 2$ проходит через точку: а) $(12; 10)$; б) $(-5; 13)$. Найдите значение k и установите, какой является эта функция — возрастающей или убывающей.

389. Постройте график функции:

а) $y = kx - 4$, которому принадлежит точка $M(5; 6)$.
б) $y = -2x + b$, которому принадлежит точка $P(-1; 0)$.

390. Постройте график функции:

а) $y = 4$; в) $y = \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$;

б) $y = -2x$; г*) $y = 0{,}5\left(x + \sqrt{x^2}\right)$.

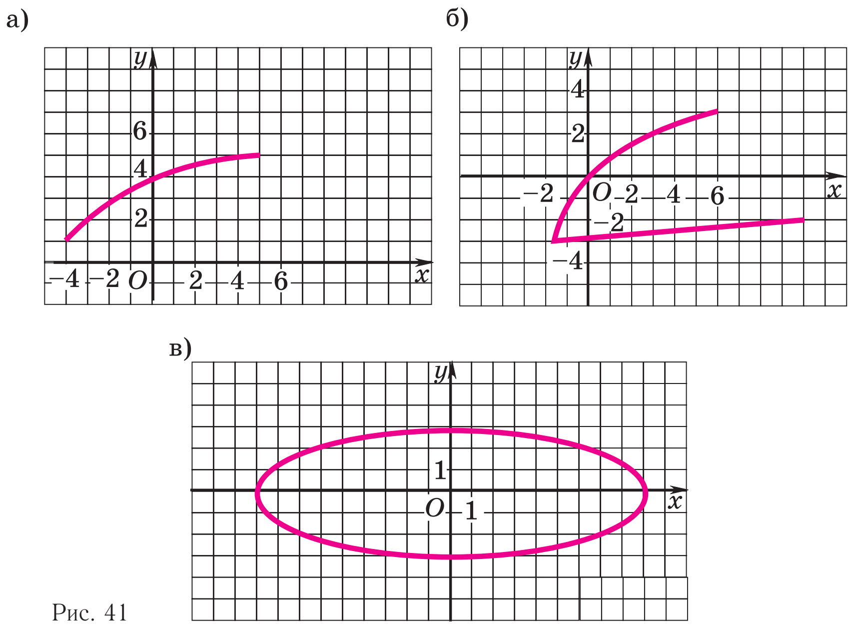


Рис. 41

391. На рисунке 41 *а*, *б*, *в* найдите графики функций. Укажите области определения и множества значений заданных графически функций.

392. Докажите, что графики функций $y = kx + b$ и $y = -kx + b$ симметричны относительно оси ординат.

393. Задайте формулой линейную функцию, если известно, что ее графику принадлежат точки: а) (0; 5) и (4; 0); б) (0; −4) и (5; 0).

394. Верно ли, что:

а) нулями функции $y = 3x^2 - 7x$ являются числа 0 и $\frac{7}{3}$;

б) функция $y = |x|$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$?

395. а) Проходит ли график функции $y = -4x - 13$ через точку $A\left(\left(\frac{2}{15}\right)^{-1}; 17\right)$?

б) Принадлежит ли графику функции $y = 12x^{-1}$ точка $B\,(3; 4)$?

396. Постройте график функции: а) $y = x^2$; б) $y = x^{-1}$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 8.

397. Имеют ли общие точки графики функций:

а) $y = \frac{4}{x}$ и $y = \frac{5}{x}$; б) $y = \frac{4}{x}$ и $y = 5x$?

398. Постройте график функции, найдите ее нули, промежутки возрастания и убывания и промежутки знакопостоянства:

а) $y = -\frac{4{,}5}{x}$; в) $y = (x - 1)^2 + 2$;

б) $y = -x^3$; г) $y = \sqrt{x^2}$.

399. Найдите область определения функции $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$, постройте ее график. Найдите нули функции.

400. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - x - 1$; б) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.

401. Найдите наименьшее целое число из области определения функции: а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = \sqrt{25 - (x-2)^2}$.

402. Найдите нули функции:

а) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$; в) $y = \sqrt{14 + 5x - x^2}$;

б) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}}$; г) $y = \sqrt{20 + x - x^2}$.

403. Известно, что точка $A\,(a; b)$ принадлежит графику функции $y = \frac{(-x^3)^4}{x^{10}}$. Принадлежат ли графику этой функции точки $B\,(-a; b)$ и $C\,(a; -b)$?

404. Установите, возрастает ли при $x \geqslant 1$ функция $f(x)$:

а) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$; б*) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 1}$.

405. Найдите площадь треугольника, ограниченного графиками функций $y = 1{,}5 - 0{,}5x$ при $y = |x|$.

406*. Докажите неравенство $x^4 - x + 0{,}5 > 0$.

407*. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}}$, где $x \in [4; 13]$;

б) $y = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$.

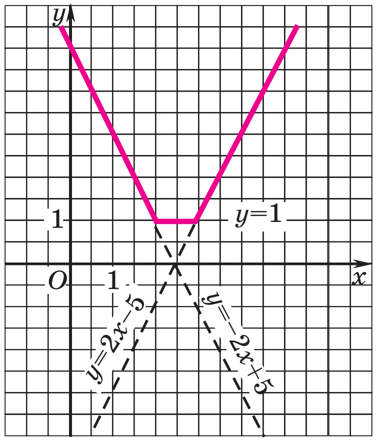


Рис. 42

408*. Запишите уравнение ломаной, график которой изображен на рисунке 42.

409. а) Докажите, что при любых значениях переменной x выражение $\dfrac{(x-3)(x-5)+2}{\sqrt{x^8}+13^0}$ принимает положительные значения.

б) Докажите, что значение выражения $\dfrac{-(x+4)(x+5)+7}{\sqrt{x^3}}$ при любом положительном значении переменной x является отрицательным числом.

410. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin^2 x+1}$, $x \in [0; \pi]$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{6}}{\cos^2 x+1}$, $x \in [0; \pi]$;

в*) $y=\dfrac{4}{\sin x+\cos x}$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

411. При каких значениях m выражение $x^2+2x+m-10$ принимает положительные значения при любом $x \in \boldsymbol{R}$?

412. Постройте график уравнения:

а) $4x-y=11$;

б*) $(x+3)(x-2)=0$;

в) $xy=-18$;

г) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$.

5. Задачи

413. Устные упражнения.

1) Сумма двух чисел равна 7, а их произведение 10. Найдите эти числа.

2) Воспроизведите текст задачи, относящейся к треугольнику, если она привела к системе $\begin{cases} x^2+y^2=64, \\ xy=12. \end{cases}$

3) Лошадь съедает воз сена за месяц, коза — за 2 месяца, овца — за 3 месяца. А за какое время лошадь, коза и овца вместе съедят воз сена?

4) Масса Земли равна $6{,}0 \cdot 10^{21}$ т, а масса Луны — $7{,}4 \cdot 10^{19}$ т. Во сколько раз Луна легче Земли?

414. а) В трех скирдах 65 т сена. В первой — на 20 т больше, чем во второй, а в третьей — $\dfrac{5}{8}$ количества сена, которое находится в первой и во второй вместе. Сколько тонн сена в каждой скирде?

б) На первом участке на 9 кустов красной смородины больше, чем на втором. Если со второго участка пересадить на первый 3 куста, то на первом участке будет кустов в 1,5 раза больше, чем на втором. Сколько кустов красной смородины было на каждом участке?

415. а) Колхоз наметил провести сев за 14 дней. Но бригада, которая проводила сев, засевала в день на 30 га больше, чем планировалось, и поэтому уже за 4 дня до намеченного срока им осталось засеять всего 20 га. Какая площадь была отведена под посев?

б) Бригада колхозников подсчитала, чтобы по плану завершить сев, нужно засевать в день по 73 га. Но колхозники засевали в день на 14 га больше, и поэтому уже за 2 дня до намеченного срока осталось засеять только 6 га. Какая площадь была отведена под посев?

416. а) Груз массой 30 т намечалось перевезти одной машиной, но сделали это другой, грузоподъемность которой на 2 т больше. Поэтому было сделано на 4 поездки меньше, чем предполагалось при помощи первой машины. За сколько рейсов был перевезен груз?

б) Вместо одной машины для перевозки груза массой 45 т взяли другую, грузоподъемность которой на 2 т меньше, и поэтому сделали на 6 рейсов больше, чем намечалось при помощи первой машины. Найдите грузоподъемность каждой машины.

417. а) В зале 320 мест, расположенных рядами, в каждом из которых мест поровну. После увеличения количества мест в каждом ряду на 4 и добавления еще одного ряда мест в зале стало 420. Сколько мест было в каждом ряду вначале?

б) Группа мальчиков купила мяч за 16 000 р., причем каждый внес одинаковый вклад. Если бы в группе было на два мальчика больше, то каждому из них пришлось бы внести на эту покупку на 400 р. меньше. Сколько мальчиков в группе?

418. а) Существуют ли два последовательных четных числа, сумма квадратов которых равна 1201?

б) Существуют ли два последовательных четных числа, сумма квадратов которых равна 1060?

419. а) Найдите дробь, значение которой не изменится, если к числителю прибавить 30, а к знаменателю — 40.

б) Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр.

420. а) Из четырех данных чисел первые три относятся как $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{20}$. Найдите эти числа, если известно, что четвертое из них составляет 15 % от второго, а второе на 8 больше суммы остальных.

б) Найдите сумму трех чисел, если известно, что третье число относится к первому как $45:154$ и составляет 40 % от второго, а сумма первого и второго равна 400.

421. а) Сторона ромба равна 51 мм. Найдите длины его диагоналей, если одна из них на 25 % короче другой.

б) Сторона ромба равна 5,1 см. Найдите длины его диагоналей, если известно, что одна из них на 25 % длиннее другой.

422. а) Одна сторона прямоугольника на 7 дм меньше другой. Какую длину может иметь большая сторона этого прямоугольника, чтобы его площадь не превосходила 60 дм^2?

б) В сосуде 4 л воды, температура которой равна 13 °C. До какой температуры надо подогреть 5 л воды, чтобы, смешав ее с этими 4 л, получить воду, температура которой не более 30 °C, но не менее 25 °C?

423*. а) От вершины прямого угла одновременно отправились и двигаются по его сторонам два тела, одно со скоростью a км/ч, другое — со скоростью b км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет равно d км?

б) Две трубы, проведенные в бассейн, имеют диаметры m и n. Найдите диаметр трубы, имеющей пропускную способность, равную сумме пропускных способностей этих труб.

424. а) Двое рабочих выполнили некоторое задание за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый выполнил бы все задание, если известно, что за первые 7 дней они совместно выполнили 80 % всего задания?

б) 60 деталей один рабочий изготавливает на 3 ч быстрее другого. За сколько часов другой рабочий изготавливает 90 деталей, если совместно они изготавливают за один час 30 деталей?

425. а) Грибники условились пройти путь до леса, равный 12 км, за определенное время. Но в действительности они вынуждены были идти со скоростью на 2 км/ч меньшей, чем намечалось, и поэтому пришли в лес на один час позже запланированного вначале. Сколько времени грибники затратили на дорогу к лесу?

б) Моторная лодка прошла 9 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на путь против течения на 15 мин больше, чем на путь по течению. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

в) По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них проходит полный круг на 5 с быстрее, чем другая; при этом они встречаются каждую минуту. Найдите скорость, с которой движется каждая точка.

426. а) Танкер может заполняться через 2 трубы, причем его заполнение через первую трубу происходит на 5 ч медленнее, чем через вторую. Найдите время заполнения танкера через первую трубу, если заполнение через обе трубы одновременно занимает не менее 6 ч.

б) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 100 км, вышли одновременно две машины. Скорость первой машины больше скорости второй на 10 км/ч. Первая машина делала остановку в пути на 50 мин. Найдите скорость первой машины, если известно, что она приехала в пункт B не позднее второй машины.

427. а) Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к ним прибавить соответственно числа 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

б) Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 21. Если второе число уменьшить на единицу, а третье увеличить на единицу, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите эти числа.

428. а) Сколько граммов воды надо добавить к 100 г 30-процентной соляной кислоты, чтобы получить 10-процентную кислоту?

б) Морская вода содержит 5 % соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5 %?

429*. а) Ученики двух классов могут озеленить совместно пришкольный участок за c дней. За сколько дней это может сделать каждый класс в отдельности, если один выполняет озеленение на p дней быстрее, чем другой?

б) Две бригады должны были принять на зернохранилище по n т ржи. Первая бригада принимала в час на k т ржи больше второй и поэтому закончила работу на t ч раньше. По скольку тонн ржи принимала в час каждая бригада?

430*. а) Имеются 77 шаров одного и того же радиуса, один из которых легче всех остальных. Как можно определить этот шар не более чем четырьмя взвешиваниями без использования гирь?

б) Среди 8 одинаковых шаров одного и того же радиуса имеется один, отличающийся от остальных по массе. Как можно определить этот шар не более чем тремя взвешиваниями на весах без применения гирь?

в) Какое наибольшее количество точек можно расположить в квадрате со стороной 1 так, чтобы все расстояния между этими точками были не меньше 0,5?

6. Тестовые задания для самопроверки

Выполните задания и найдите правильный ответ.

1. Вычислите значение выражения $\left(3\frac{1}{5}-3\frac{7}{10}\right):1\frac{1}{4}+2\frac{3}{4}$.

Ответы: а) 3,2; б) 4; в) $2\frac{7}{20}$; г) $-2\frac{7}{20}$.

2. Найдите область определения выражения $\frac{x^2-1}{x-1}$.

Ответы: а) $x > 1$; б) $\boldsymbol{R}$; в) все числа, кроме 1; г) $(0; +\infty)$.

Вычислите значение выражения (**3—7**):

3. $0,25+\sqrt{9^{-1}}$.

Ответы: а) $-2,75$; б) $\frac{7}{12}$; в) $\frac{3}{7}$; г) 3,25.

4. $\frac{23}{\sqrt{6^2\cdot 5^2}}+0,45$.

Ответы: а) 1,4; б) $1\frac{13}{60}$; в) 1; г) $\frac{23}{30}$.

5. $\left(1\frac{4}{15}\right)^{-1}\cdot 0,(3)$.

Ответы: а) 0,4; б) 0,7; в) 0,(4); г) $\frac{5}{19}$.

6. $\left(4\frac{19}{24}-1\frac{5}{12}\right)\cdot\left(6\frac{5}{6}-5\frac{2}{3}\right)$.

Ответы: а) 4; б) ≈ 3; в) $3\frac{15}{16}$; г) 3,9375.

7. Вычислите значение выражения $2^3\cdot 2^2x$ при $x=-5$.

Ответы: а) $\frac{1}{128}$; б) 2^{13}; в) 2^{-30}; г) -160.

8. Упростите выражение: $\frac{\left(-a^5\right)^3\cdot\left(-a^4\right)^{-2}}{\left(-a^4\right)^4}$.

Ответы: а) $\frac{1}{a^9}$; б) $-a^{16}$; в) $-a^{23}$; г) a^7.

9. Запишите многочлен $3ax-6bx+5ay-10by-a+2b$ в виде произведения двух многочленов.

Ответы: а) $(a-2)(3x+5y)$; б) $(3x-5y+1)(a+2b)$; в) $(2b-a)(3x+3y+1)$; г) $(a-2b)(3x+5y-1)$.

10. Выполните действия:

$\left(\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{y}{2x-2y}\right):\frac{2y}{x^2-y^2}$.

Ответы: а) $\frac{x-y}{4}$; б) $\frac{x-y}{2}$; в) $\frac{xy-y}{4}$; г) $\frac{2x-x^2-y^2}{4(y-x)}$.

11. Составьте квадратное уравнение, корни которого — числа $2-\sqrt{5}$ и $2+\sqrt{5}$.

Ответы: а) $x^2-4x+1=0$; в) $x^2+5x-1=0$;
б) $x^2-4x-1=0$; г) $2x^2+3x+1=0$.

12. Свежие грибы содержат 90 % воды, а в сухих грибах — 12 % воды. Сколько сухих грибов получится из 44 кг свежих?

Ответы: а) 10 кг; б) 5 кг; в) 4,4 кг; г) 8,8 кг.

13. Сколько обезьян в стае, если уменьшенная на 3 пятая часть их спряталась и только одна осталась играть на поляне?

Ответы: а) 25; б) задача не имеет решений; в) 5; г) 10.

14. Найдите длину меньшего основания трапеции, если ее большее основание равно 20 см, высота — 12 см, а боковые стороны — 13 см и 15 см.

Ответы: а) 6 см; б) 16 см; в) 6 см или 16 см; г) 10 см.

15. При двух последовательных одинаковых процентных повышениях дневного заработка сумма 100 р. повысилась до 125 р. 44 к. На сколько процентов повышался дневной заработок?

Ответы: а) на 10 %; б) на 11 %; в) на 12 %; г) на 6 %.

16. На графике функции $y = x^{-1}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к точке $(-1;\ -1)$.

Ответы: а) $(2; 0{,}5)$; б) $(0{,}5; 2)$; в) $(1; 1)$; г) $(0{,}9; 1{,}1)$.

17. Решите уравнение $x^2 - (a + a^{-1})x + 1 = 0$ относительно переменной x.

Ответы: а) $x_1 = a,\ x_2 = a^{-1}$; б) $x_1 = -a,\ x_2 = -\frac{1}{a}$; в) $x_1 = 2a$, $x_2 = \frac{2}{a}$; г) $x_1 = 1,\ x_2 = a^{-1}$.

18. Сколько целочисленных решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} 13x - x^2 - 42 > 62 - x^2, \\ x^2 \leqslant 100? \end{cases}$$

Ответы: а) одно решение; б) два решения; в) ни одного решения; г) три решения.

19. При каких значениях c система уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 3x - 2y = c \end{cases}$ имеет решение $(k; p)$ такое, что $k > 0$ и $p > 0$?

Ответы: а) $(15; +\infty)$; б) $-15 < c < 15$; в) $c \in (0; 15)$; г) $c \geqslant 15$.

20. Решите уравнение $(x + 1)^{-1} + (x - 1)^{-1} = (3x - 1)(x - 1)^{-1}$.

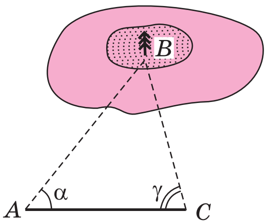
Ответы: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $1;\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $1;\ \frac{1}{3}$.

21*. Решите уравнение $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$.

Ответы: а) 1; б) 1 и 6; в) -1 и 1; г) $\frac{5+\sqrt{45}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{45}}{2}$; 1.

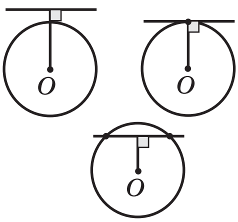
Геометрия

Глава I



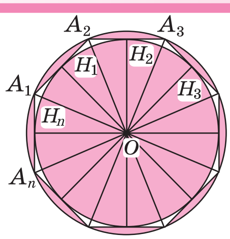
Соотношения между сторонами и углами треугольника

Глава II



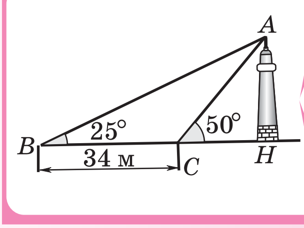
Окружность

Глава III

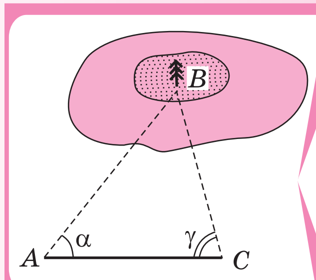


Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга

Глава IV



Повторение курса геометрии



Глава I

Соотношения между сторонами и углами треугольника

§ 1. Тригонометрические соотношения между сторонами и углами треугольника

1. Теорема синусов. Теорема косинусов

В предыдущем классе вы изучали тригонометрические функции углов от 0° до 180°, пользовались разными тригонометрическими формулами, связанными со свойствами прямоугольных треугольников. Продолжим изучение тригонометрии. Рассмотрим две теоремы, выражающие соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника, которые очень часто используются при решении разных задач.

Докажем сначала, что **площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними**.

Доказательство. Если треугольник остроугольный (рис. 43, *а*), то, проведя его высоту BH, имеем $\frac{BH}{AB} = \sin A$, откуда $BH = AB \sin A$. Как известно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. Подставив вместо BH выражение $AB \sin A$, получим $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A$.

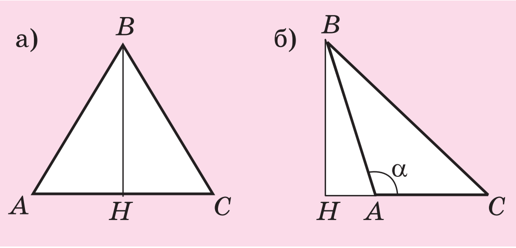


Рис. 43

Если треугольник тупоугольный (рис. 43, *б*), то его высота $BH = AB \sin(180° - \alpha)$. Поскольку $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то и в этом случае $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A$.

Случай, когда треугольник прямоугольный, рассмотрите самостоятельно.

Теорема синусов. **Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.**

Доказательство. Пусть в произвольном треугольнике ABC (рис. 44) $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Докажем, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Для этого разделим abc трижды на выражение для площади треугольника ABC:

$$\frac{abc}{0{,}5bc \sin A} = \frac{abc}{0{,}5ac \sin B} = \frac{abc}{0{,}5ab \sin C}.$$

Отсюда имеем: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, что и требовалось доказать.

Теорему синусов можно сформулировать и так: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, т. е. синусы углов треугольника пропорциональны противоположным сторонам.

Теорема косинусов. **Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.**

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, например, что $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Выберем систему координат так, чтобы вершина A находилась в ее начале, вершина B принадлежала положительной полуоси абсцисс, а вершина C находилась в верхней полуплоскости (рис. 45). Тогда будем иметь: $A(0; 0)$, $B(c; 0)$ и $C(b \cos A; b \sin A)$.

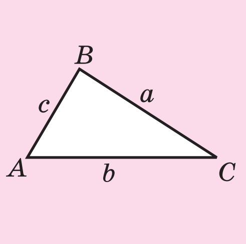


Рис. 44

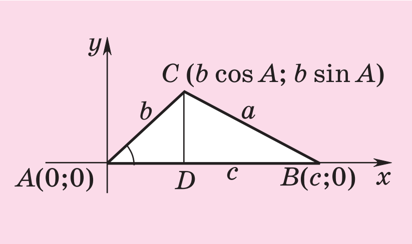


Рис. 45

По формуле расстояния между точками получим: $BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A)^2 = b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\cdot\sin^2 A = b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, что и требовалось доказать.

Заметим, что теорему косинусов мы доказали ***методом координат***. С его помощью мы выводили уравнение прямой и окружности в курсе алгебры предыдущего класса, решали некоторые геометрические задачи. Сущность этого метода заключается в том, что во-первых, вводят прямоугольную систему координат, во-вторых, выражают условие задачи в координатах, в-третьих, решают задачу с использованием алгебраических понятий и их свойств.

Выведем теперь с применением теоремы косинусов еще одну формулу площади треугольника (формула Герона[1]).

Площадь треугольника со сторонами a, b, c равна

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр треугольника.

*Доказательство. В произвольном треугольнике ABC (рис. 46) площадь $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. Выразим $\sin C$ через a, b, c и p. Так как $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, то $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C}$.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, откуда

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Тогда

$$\sin C = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} = \sqrt{\frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{(2ab)^2}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{(2ab)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2p\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-a)}}{2ab} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}.$$

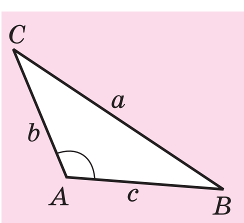


Рис. 46

Подставив последнее выражение для $\sin C$ в формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab},$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Теорема доказана.*

[1] Герон Александрийский — древнегреческий математик, который жил в Александрии около I в.

Задача 1. В треугольнике ABC угол A равен 30°, угол B — 45°. Найти отношение сторон $a : c$.

Решение. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{c}{\sin 105°}$; $\sin 105° = \cos 15°$, поэтому $\frac{a}{0{,}5} = \frac{c}{\cos 15°}$, откуда $\frac{a}{c} \approx \frac{0{,}5}{0{,}966} \approx 0{,}517$.

Ответ: $\approx 0{,}517$.

Задача 2. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $CA : CB = m : n$, $\angle C = 120°$. Найти: CA; CB.

Решение. По теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA\cdot CB\cos 120°.$$

Пусть $CA = mx$, $CB = nx$, тогда $c^2 = m^2x^2 + n^2x^2 + 2mx\cdot nx\cdot 0{,}5$; $c^2 = (m^2 + n^2 + mn)x^2$, откуда

$$x = \sqrt{\frac{c^2}{m^2+mn+n^2}};\ x = \frac{c}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}.$$

Тогда $CA = \frac{mc}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}$; $CB = \frac{nc}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}$.

Задача 3*. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство. Пусть у произвольного параллелограмма $ABCD$ (рис. 47) $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$.

Докажем, что $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

По теореме косинусов

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle BAD,$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ABC.$$

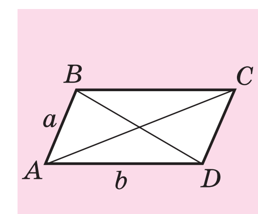


Рис. 47

Поскольку $\cos\angle BAD = -\cos\angle ABC$, то $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle BAD + a^2 + b^2 + 2ab\cos\angle BAD$, откуда $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, что и требовалось доказать.

Задача 4*. Доказать, что если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника, а третьи стороны не равны, то против большей из этих сторон лежит больший угол.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1 = m$, $AC = A_1C_1 = n$; $BC > B_1C_1$ (рис. 48, *а*, *б*). Докажем, что $\angle A > \angle A_1$. По теореме косинусов имеем:

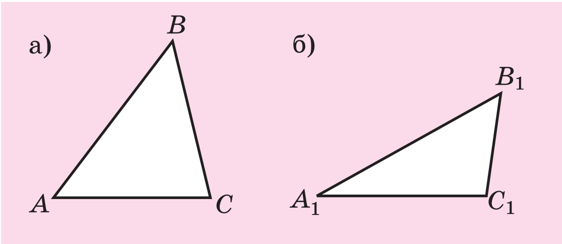


Рис. 48

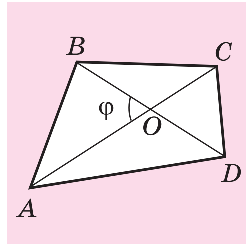


Рис. 49

$BC^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos A$; $B_1C_1^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos A_1$. Поскольку $BC > B_1C_1$, то $m^2 + n^2 - 2mn\cos A > m^2 + n^2 - 2mn\cos A_1$, откуда $-2mn\cos A > -2mn\cos A_1$, $\cos A < \cos A_1$, $\angle A > \angle A_1$.

Задача 5. Доказать, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Имеем (рис. 49):

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} =$$
$$= \frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin(180° - \varphi) + \frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin(180° - \varphi) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\varphi\,(OA\cdot OB + OB\cdot OC + OC\cdot OD + OD\cdot OA) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\varphi\,(OB\,(OA + OC) + OD\,(OC + OA)) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\varphi\,(OB\cdot AC + OD\cdot AC) = \frac{1}{2}AC\cdot\sin\varphi\,(OB + OD) =$$
$$= \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi.$$

2*. Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Введем понятие *угла поворота*. Отметим в координатной плоскости на оси OX точку A. Повернем луч OA вокруг точки O на угол α.

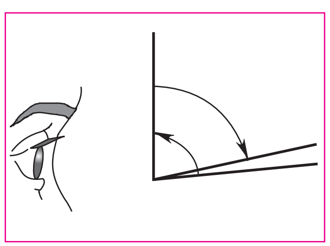


Рис. 50

Выберем какое-либо направление поворота в качестве положительного, а противоположное направление будем считать отрицательным (рис. 50). *Положительным обычно считают направление поворота против часовой стрелки.* Например, поворот на

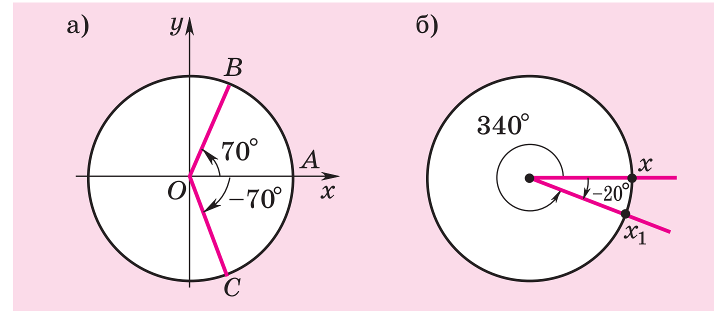


Рис. 51

угол 70° против часовой стрелки будем называть поворотом на 70°, поворот же на 70° по часовой стрелке — поворотом на минус 70° (рис. 51, *а*).

Угол поворота считается направленной величиной, числовое значение которой может быть как положительным, так и отрицательным или равным нулю (рис. 51, *б*).

Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1, будем называть *единичной окружностью*.

На единичной окружности отметим точку P_α (рис. 52).

Поставим в соответствие каждому углу α определенное число y_α — ординату точки P_α. Эту ординату называют *синусом угла* α и обозначают $\sin\alpha$, т. е. $y_\alpha = \sin\alpha$ (см. рис. 52).

Аналогично поставим в соответствие каждому углу α абсциссу x_α точки P_α. Эту абсциссу называют *косинусом угла* α и обозначают $\cos\alpha$, т. е. $x_\alpha = \cos\alpha$.

Тангенс угла α — отношение ординаты точки P_α к ее абсциссе: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенс угла α — отношение абсциссы точки P_α к ее ординате: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

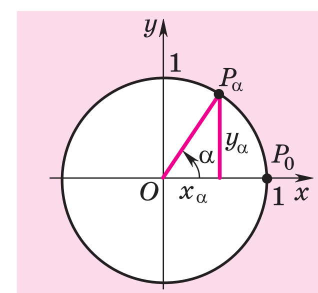


Рис. 52

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ *называются тригонометрическими функциями угла* α.

Напомним, что для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ выполняется равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, которое называется *основным тригонометрическим тождеством*.

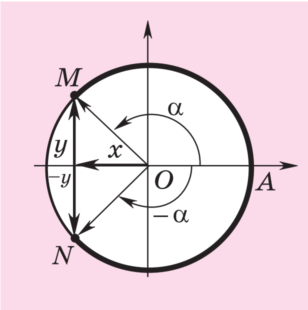


Рис. 53

Выведем теперь формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказательство. Пусть α — данный угол; рассмотрим угол $-\alpha$. Взаимно противоположные углы α и $-\alpha$ образуются одинаковым поворотом подвижного радиуса от общего начального положения OA, но во взаимно противоположных направлениях; поэтому их конечные стороны OM и ON симметричны относительно оси абсцисс (рис. 53). Следовательно, абсциссы точек M и N равны, а ординаты противоположны. Сравним координаты точки $M(x;\ y)$: $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$ с координатами точки $N(x;\ -y)$: $x = \cos(-\alpha)$ и $-y = \sin(-\alpha)$, получим: $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

3. Синус и косинус суммы и разности двух углов

Пусть α и β — острые углы, составляющие в сумме менее 90°. Чтобы выразить $\sin(\alpha + \beta)$ через функции углов α и β, построим треугольники (рис. 54).

$$\sin\alpha = \frac{BC}{R}; \qquad \cos\alpha = \frac{OC}{R};$$

$$\sin\beta = \frac{FD}{R}; \qquad \cos\beta = \frac{OD}{R};$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{FM}{R}; \qquad \cos(\alpha + \beta) = \frac{OM}{R}.$$

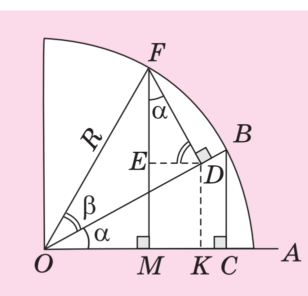


Рис. 54

Проведем отрезки $DE \parallel OA$ и $DK \parallel BC$. Имеем: $FM = ME + EF = KD + EF$.

Чтобы выразить KD, рассмотрим прямоугольные треугольники ODK и OBC. Они подобны, так как имеют общий угол α.

$$\frac{DK}{BC} = \frac{OD}{OB};$$

$$DK = BC \cdot \frac{OD}{OB} = ME.$$

Отрезок EF выразим из прямоугольных треугольников FED и OBC, которые подобны (подобность этих треугольников докажите самостоятельно):

$$\frac{EF}{OC} = \frac{FD}{OB};\ EF = OC \cdot \frac{FD}{OB}.$$

Заметив, что $OB = OF$, получим:

$$FM = ME + EF = BC \cdot \frac{OD}{OF} + OC \cdot \frac{FD}{OF}.$$

Разделим обе части равенства на радиус, чтобы получить отношение отрезков и перейти к тригонометрическим функциям: $\frac{FM}{R} = \frac{BC}{R} \cdot \frac{OD}{OF} + \frac{OC}{R} \cdot \frac{FD}{OF}$, т. е.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OM}{OF}$. Но $OM = OK - MK = OK - ED$; следовательно, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{OK}{OF} - \frac{ED}{OF}$. Разделив и умножив в правой части последнего равенства первый член на OD, а второй член на FD, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OK}{OD} \cdot \frac{OD}{OF} - \frac{ED}{FD} \cdot \frac{FD}{OF}.$$

Из треугольника ODK:

$$\frac{OK}{OD} = \cos\alpha;$$

из треугольника OFD:

$$\frac{OD}{OF} = \cos\beta;$$

из треугольника EFD:

$$\frac{ED}{FD} = \sin\alpha;$$

из треугольника OFD:

$$\frac{FD}{OF} = \sin\beta.$$

Следовательно,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Разность двух углов можно представить в виде суммы:

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, а потому

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta);$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta);$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Докажите самостоятельно, что

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha; \ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Рассмотрим тангенс угла как частное от деления синуса этого угла на его косинус, тогда:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Заменяя угол β на $-\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Если в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ принять $\beta = \alpha$, то имеем: $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Пример 1. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс $-135°$.

Решение. $\cos(-135°) = \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(-135°) = -\sin 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg}(-135°) = -\operatorname{tg}135° = 1$; $\operatorname{ctg}(-135°) = -\operatorname{ctg}135° = 1$.

Пример 2. Получить формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$.

Решение. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

Заменив $\sin^2\alpha$ на $1-\cos^2\alpha$, получим:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Заменив $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$, получим:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Пример 3. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, где α — тупой угол, β — острый угол. Найти $\sin(\alpha+\beta)$.

Решение. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\sin\beta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$.
Поэтому

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{3-2\sqrt{14}}{12}.$$

Пример 4. Вычислить $\cos 15°$.

Решение. Так как $15° = 45° - 30°$ и известны

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 30° = \frac{1}{2}, \text{ то}$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \approx 0{,}9659.$$

Пример 5. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, α и β — острые углы. Найти $\alpha+\beta$.

Решение. Имеем: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$.

Следовательно, $\alpha+\beta = 45°$.

Пример 6. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $0° < \alpha < 90°$.
Найти $\cos 2\alpha$.

Решение. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$.

Пример 7. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $0° < \alpha < 90°$. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{3}{1-\frac{9}{4}} = -\frac{12}{5}$.

?

1. Что понимается под углом поворота?
2. В каком случае угол поворота считают положительным, в каком — отрицательным?
3. Дайте определение: синуса угла α, косинуса угла α, тангенса угла α, котангенса угла α.
4. Для каких углов $\alpha \in [0°; 180°]$ существует синус α, косинус α?
5. Для каких углов $\alpha \in [0°; 180°]$ не существует тангенса α, котангенса α?
6. Какие значения могут принимать синус, косинус, тангенс и котангенс угла $\alpha \in [0°; 180°]$?
7. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс в I и II четвертях?

8. Докажите, что если в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то треугольник прямоугольный с прямым углом C.

9. Какова зависимость между синусами (косинусами, тангенсами, котангенсами) противоположных углов?

10. Докажите теорему $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

11. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = AB\sin A$, $AC = AB\cos A$, $BC = AC\operatorname{tg} A$.

12. Докажите, что $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

13. Найдите тригонометрические функции углов: 60°, 120°, 135°, 150°.

14. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

15. Сформулируйте и докажите теорему синусов.

Задания

Устные упражнения **1—8**.

1. Углом какой четверти является угол 100°, противоположный ему угол?

2. Что больше: а) $\sin 10°$ или $\sin 10° \cdot \sin 15°$; б) $\cos 20°$ или $\cos^2 20°$; в) $\cos 100°$ или $\cos^2 100°$?

3. Существует ли такой угол, при котором верно равенство: $\sin\alpha = -\sqrt{1{,}2}$; $\cos\alpha = \sqrt{3} - 2$; $\operatorname{tg}\alpha = 10^{10}$?

4. Может ли быть верным равенство: а) $\cos\alpha = 2$; б) $\sin\alpha = 3{,}4 - \sqrt{2}$?

5*. Может ли синус отрицательного угла быть положительным? Приведите пример.

6. Докажите, что синус любого угла треугольника всегда положительный. Верно ли это для косинуса, тангенса, котангенса?

7. Найдите углы параллелограмма, если косинус одного из его углов равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Сравните тангенсы углов 13°, 37°, 73°. Дайте обоснование.

9*. Пусть требуется обточить «на конус» конец цилиндрического вала диаметром $D \approx 154{,}2$ мм (рис. 55) так, чтобы угол уклона конуса $\alpha \approx 8°30'$, а длина обточки $H \approx 270{,}0$ мм.

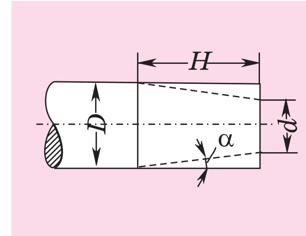


Рис. 55

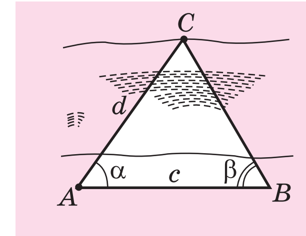


Рис. 56

Чтобы установить вал на токарном станке для указанной обработки, надо знать, какой диаметр d будет иметь конец вала после его обточки. Найдите этот диаметр.

Решение. 1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{D-d}{2H}$ (см. рис. 55), откуда

$$d = D - 2H \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

2) Подставив числовые данные, находим:

$$d \approx 154{,}2 - 2 \cdot 270{,}0 \cdot \operatorname{tg} 8°30' \approx 154{,}2 - 540{,}0 \cdot 0{,}1495 \approx$$
$$\approx 154{,}2 - 80{,}73 \approx 73{,}5\ (\text{мм}).$$

Ответ: $\approx 73{,}5$ мм.

10. Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 56). Напомним, что эту задачу можно решить с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрите этот и другой способы решения задачи с использованием формул тригонометрии.

11. Из вершины B треугольника ABC проведена высота BD. Докажите, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm 2AC \cdot AD$, где знак «+», если угол C тупой, а «−», если угол C острый.

12. Докажите формулы приведения:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$,
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$,
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$,
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

13. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{12}{23}$ и α — острый угол;

б) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

14. Какой знак имеет выражение:

а) $(\cos 45° - \sin 100°)(\operatorname{tg} 150° - \operatorname{ctg} 30°)$;
б) $(\operatorname{tg} 120° - \sin 60°)(\cos 155° - \cos 180°)$?

15. Решите уравнение:

а) $\frac{4x-121^0}{9-8x} = \frac{\operatorname{ctg} 135°}{\sin 30°}$; б) $\frac{3x-9^{-1}}{17-6x} = \frac{\cos 60°}{\operatorname{tg} 45°}$.

16. Решите неравенство:

а) $3(x-2) \leqslant x + \operatorname{tg}^{-2} 45°$; в) $x^2 + x > \sin 30°$;
б) $2x^{-1} \leqslant \sin 150°$; г) $x^2 - x > \cos 120°$.

17. Является ли тождеством равенство:

а) $(\sin^2\alpha + 1)^2 - (\sin^2\alpha - 1)^2 = 4\sin^2\alpha$;

б*) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = |\operatorname{tg}\alpha| + |\cos^{-1}\alpha|$?

18*. Вычислите значение выражения $\frac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{5\cos\alpha + 4\sin\alpha}$, если:

а) $\sin\alpha = \cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

19. При каких значениях α из промежутка от 0° до 360°:

а) $\cos^2\alpha = 2(\sin\alpha + 1)$; б) $7(1 - \cos^2\alpha) = 2\sin^2\alpha$?

20. Верно ли неравенство:

а) $\sin 135° + \cos 40° > 1$; б) $\sin 40° \cdot \operatorname{tg} 30° > \frac{1}{2}$?

21. Докажите, что если в треугольнике ABC $\angle C = 120°$, то $c^2 = a^2 + ab + b^2$.

22*. Докажите, что если в треугольнике ABC $(b + c - a)\times$ $\times(b + c + a) = 3bc$, то $\angle A = 60°$.

23. В треугольнике один из углов равен 60°, а прилежащие к нему стороны равны: а) 10 см и 16 см; б) 8 см и 15 см. Найдите длину третьей стороны треугольника.

24. Найдите стороны остроугольного треугольника, в котором разность двух сторон равна 20 см, а проекции этих сторон на третью сторону равны 9 см и 5 см.

25. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Найдите отношения $a : b : c$.

26*. Могут ли синусы углов треугольника относиться как: а) 4 : 5 : 6; б) 5 : 7 : 13?

27*. Вычислите углы треугольника, стороны которого равны 7 см, 8 см и 9 см.

28. Стороны параллелограмма 4 дм и 5 дм, а его острый угол 52°. Найдите длины диагоналей параллелограмма.

29. Две стороны треугольника равны 4 см и 6 см, а углы, лежащие против них, относятся как 1 : 2. Найдите третью сторону треугольника.

30. Стороны параллелограмма равны 3 см и 3,5 см, а одна из диагоналей 5,5 см. Найдите другую диагональ.

31. Диагонали параллелограмма равны 3,6 см и 2,8 см, а одна из диагоналей 1,6 см. Найдите периметр параллелограмма.

32. Стороны параллелограмма равны 33 см и 21 см, а диагонали относятся как 6 : 7. Найдите диагонали параллелограмма.

33. Диагонали параллелограмма равны 14 см и 18 см, а стороны относятся как 4 : 7. Найдите периметр параллелограмма.

34. Докажите, что длину m_a медианы, проведенной из вершины A треугольника ABC со сторонами a, b, c, можно найти по формуле

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

35. Найдите длины медиан треугольника, стороны которого равны 7 дм, 11 дм и 12 дм.

36. Найдите площадь треугольника по двум сторонам и углу между ними:

а) 5,8 дм, 3,5 дм, 65°; б) 2,4 см, 2,6 см, 50°.

37. В треугольнике одна из сторон равна 5 см, а прилежащие к ней углы равны 40° и 50°. Найдите длины двух других сторон треугольника.

38. В треугольнике две стороны соответственно равны 8 см и 5 см, а угол, противолежащий большей из них, равен 120°. Найдите длину третьей стороны треугольника.

39. В треугольнике стороны равны 5 см, 12 см и 13 см. Найдите углы треугольника.

40. В треугольнике стороны равны 15 дм, 14 дм и 13 дм. Найдите углы треугольника.

41. Найдите площадь треугольника по трем данным сторонам:

а) 13 см, 14 см и 15 см; в) 5 мм, $8\frac{2}{3}$ мм и $12\frac{1}{3}$ мм;

б) 6,5 дм, 2,2 дм и 5 дм; г) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

42. Найдите длины сторон параллелограмма, если они относятся как 2 : 3, а его диагонали равны 17 см и 19 см.

43. Найдите длины диагоналей параллелограмма, если они относятся как 2 : 3, а его стороны равны 11 см и 23 см.

44. Найдите тупой угол ромба, сторона которого равна среднему пропорциональному между диагоналями.

45. Найдите высоту и диагонали трапеции $ABCD$, если ее стороны AB, BC, CD, DA соответственно равны:

а) 6 см, 3 см, 1 см и 4 см; б) 25 дм, 13 дм, 11 дм и 15 дм.

46. Длины двух сторон треугольника равны 10 см и 15 см. Докажите, что длина биссектрисы треугольника, проведенная из вершины угла между ними, не больше 12 см.

47. Найдите площадь параллелограмма, одна сторона которого равна 51 см, а диагонали 40 см и 74 см.

48. Найдите площадь равнобедренной трапеции, меньшее основание которой равно 15 см, а высота равна 10 см и которая образует с боковой стороной угол в 35°.

49. Две стороны треугольника соответственно равны 2 дм и 3 дм, а угол между ними 45°. Найдите длину третьей стороны треугольника.

50. Две стороны треугольника соответственно равны 5 см и 8 см, а угол между ними равен 60°. Найдите длину третьей стороны треугольника.

51. Для укрепления радиомачты имеется стальной трос длиной 10 м. На какой высоте надо прикрепить трос к радиомачте и на каком расстоянии от мачты следует закрепить его в земле, чтобы угол наклона троса к земле был равен 60°?

52*. Верно ли, что $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$?

53. Докажите, что:

1) $\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$;
2) $\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$;
3) $(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$;
4) $\sin(90° - \alpha)\cos(180° - \alpha) = -\cos^2\alpha$;
5) $\cos(90° - \alpha)\sin(180° - \alpha) = \sin^2\alpha$.

54. Что больше: $\cos 120°$ или $\cos 185°$?

55. Что больше: $\mathrm{ctg}\, 26°$ или $\mathrm{tg}\, 76°$?

56. Длина балки, на которую опираются стропила двускатной крыши, равна 10 м. Найдите высоту крыши, зная, что стропила поставлены на балку под углом в 40°.

57. Сечение полотна железной дороги имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 м и 35 м. Угол откоса равен 38°. Найдите высоту насыпи полотна.

58. В кубе проведены диагонали BD, CD граней (рис. 57). Найдите тригонометрические функции углов (заполните таблицу в тетради). Обозначим ребро куба a и найдем диагонали по теореме ... .

$BD = ...$; $B_1D = ...$; $C_1D = ...$.

	sin	cos	tg
$\angle CDC_1$			
$\angle DC_1C$			
$\angle B_1DB$			
$\angle DB_1B$			
$\angle B_1DC_1$			
$\angle DB_1C$			

59. Точка O — середина ребра AC пирамиды $ABCD$ (рис. 58), все грани которой равносторонние треугольники. Найдите тригонометрические функции углов (заполните таблицу в тетради).

	sin	cos	tg
$\angle OCD$			
$\angle ODC$			
$\angle ADC$			
$\angle ABO$			
$\angle BOC$			
$\angle ABC$			

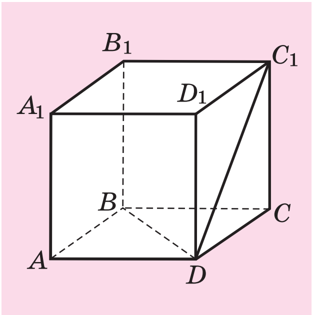


Рис. 57

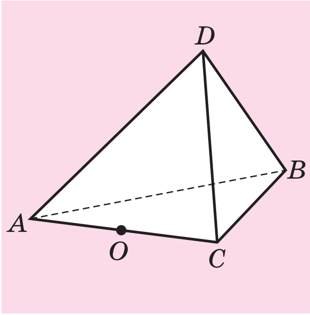


Рис. 58

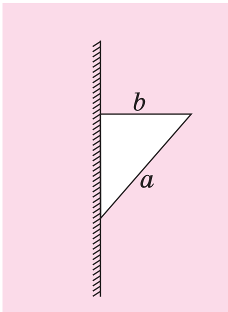


Рис. 59

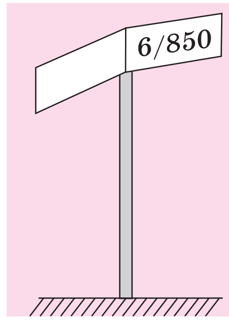


Рис. 60

60. а) Телеграфный столб высотой 9,0 м (рис. 59) надо закрепить железным тросом, образующим с поверхностью грунта угол в 50°. Какой длины надо взять трос, если он прикрепляется к столбу на расстоянии $\frac{2}{3}$ высоты столба, считая от поверхности земли? Поверхность грунта горизонтальна.

б) Вдоль железнодорожного полотна ставятся указатели уклона. На рисунке 60 изображен такой указатель с двумя числами 6 и 850. Первое число показывает, что угол уклона пути (угол между плоскостью полотна и горизонтальной плоскостью) имеет тангенс 0,006, а второе число дает в метрах длину участка пути с таким уклоном. Выразите данный уклон в градусах. Определите, на какую высоту поднялся поезд, прошедший 730 м по данному участку пути.

§ 2. Решение треугольников

1. Основные случаи решения треугольников

Главными элементами треугольника считаются его стороны и углы. К основным задачам на решение произвольных треугольников относят задачи, в которых даны три независимых элемента треугольника, определяющие его, и надо найти остальные его элементы. В случае прямоугольного треугольника один его элемент (прямой угол) известен; решением прямоугольных треугольников вы занимались при изучении тригонометрии в предыдущем классе. Рассмотрим теперь в общем виде основные задачи на решение произвольных треугольников.

Задача 1. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Дано: $BC = a$, $AC = b$, угол C в треугольнике ABC (рис. 61).

Найти: $AB = c$, $\angle A$, $\angle B$.

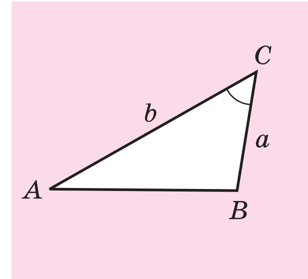


Рис. 61

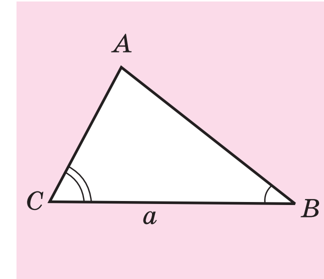


Рис. 62

Р е ш е н и е. 1) По теореме косинусов $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.

2) По теореме косинусов $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, откуда (если данные числовые) с применением таблицы или вычислительных средств находим угол A.

3) $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

Задача 2. Решение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$ в треугольнике ABC (рис. 62).

Найти: b, c, $\angle A$.

Р е ш е н и е. 1) $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

2) По теореме синусов $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

3) По теореме синусов $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Задача 3. Решение треугольника по трем сторонам.

Дано: a, b, c в треугольнике ABC (рис. 63).

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Р е ш е н и е. 1) По теореме косинусов $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, откуда находим угол A (рис. 63).

2) По теореме косинусов $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, откуда находим угол B.

3) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Рассмотрим примеры на решение треугольников (в том числе задачи, в которых решение треугольника является составной частью решения задачи).

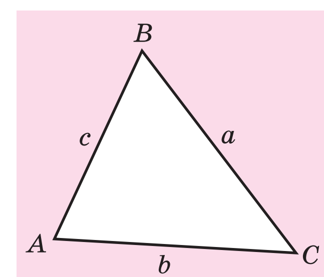


Рис. 63

2. Нахождение элементов треугольников и четырехугольников

Задача 4. В треугольнике известны сторона $a = 5$ и два угла — $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$. Найти третий угол и две другие стороны треугольника.

Р е ш е н и е. 1) $\angle A = 180° - 30° - 45° = 105°$.

2) $b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{5 \cdot 0,5}{0,97} \approx 2,6$.

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{5\sqrt{2}}{2 \cdot 0,97} \approx 3,7$.

О т в е т: 105°; ≈ 2,6; ≈ 3,7.

Задача 5. Как измерить расстояние от точки A до недоступной точки B (рис. 64)?

Для этого возьмем точку C, измерим расстояние AC и углы α и γ. Тогда по теореме синусов имеем:

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin(180° - (\alpha + \gamma))}, \text{ откуда } AB = \frac{AC \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Задача 6. Как измерить высоту предмета, основание которого недоступно (рис. 65)?

Для этого возьмем точку A и измерим угол $DAB = \alpha$. Далее на продолжении отрезка DA отложим отрезок AC. Затем измерим угол BCA, равный γ.

Из треугольника ABC находим по теореме синусов AB: $AB = \frac{AC \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$, $BD = AB \sin\alpha = \frac{AC \sin\gamma \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$. Тогда высота предмета $BH = \frac{AC \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} + h$.

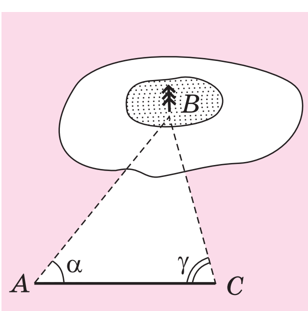


Рис. 64

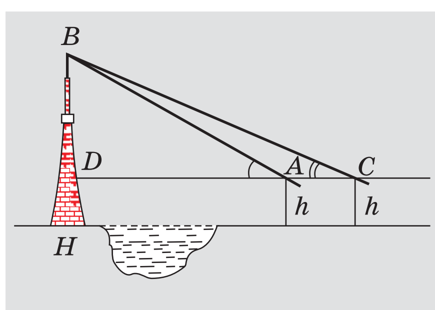


Рис. 65

Задача 7. Найти наименьший угол треугольника со сторонами 17 см, 25 см и 28 см.

Р е ш е н и е. Наименьший угол лежит против наименьшей стороны треугольника, равной 17 см. Обозначим этот угол через x. По теореме косинусов $17^2 = 25^2 + 28^2 - 2 \cdot 25 \cdot 28 \cos x$, откуда

$$\cos x = \frac{25^2 + 28^2 - 17^2}{2 \cdot 25 \cdot 28} = \frac{1120}{2 \cdot 25 \cdot 28} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Тогда $x \approx 37°$.

О т в е т: ≈ 37°.

Задача 8. Найти площадь трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$, у которой угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон равен 45°.

Р е ш е н и е. Построим параллелограмм $ABCE$ (рис. 66). Обозначим: $BC = x$; $AD = y$. Тогда $(b - a)\,h = 2S_{AED} = xy \sin 45°$.

По теореме косинусов $(b - a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45°$.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) = (BO^2 + CO^2) + (DO^2 + AO^2) = x^2 + y^2$.

Поэтому с учетом, что $\cos 45° = \sin 45°$ $(b - a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \sin 45° = a^2 + b^2 - 2\,(b - a)\,h$, откуда $h = \frac{ab}{b - a}$. Тогда площадь трапеции $ABCD$ равна $S = \frac{ab\,(a + b)}{2\,(b - a)}$.

О т в е т: $S = \frac{ab\,(a + b)}{2\,(b - a)}$.

Задача 9. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = 5$ дм, $DC = 4$ дм, $\angle BAD = \angle BCD = 90°$, $\angle ADC = 70°$ (рис. 67). Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей прямоугольных треугольников BAD и BCD. План ее вычисления может быть следующим:

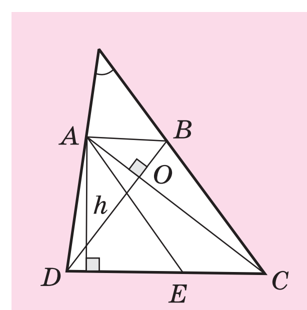


Рис. 66

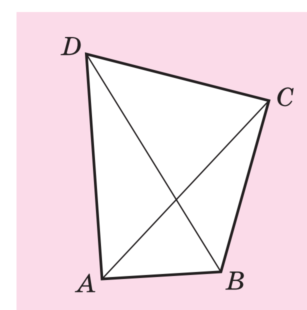


Рис. 67

1) $AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 70°$, откуда находим AC.

2) $\dfrac{AC}{\sin 70°} = \dfrac{5}{\sin \angle ACD}$, откуда находим угол ACD.

3) $\angle ACB = 90° - \angle ACD$.

4) $\dfrac{AC}{\sin 70°} = \dfrac{AB}{\sin \angle ACB}$, откуда находим AB.

5) $\dfrac{AC}{\sin 70°} = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC}$, откуда находим BC.

6) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD)$.

Эту задачу можно решить иначе, продолжив стороны AB и DC до пересечения в некоторой точке и рассмотрев подобные треугольники. (Сделайте это самостоятельно.)

Задача 10. Дано a, b, α в треугольнике ABC. Найти β, γ и c.

Решение. 1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$.

Если $b \sin\alpha > a$, то задача не имеет решений.

Если $b \sin\alpha = a$, то $\beta = 90°$ и решение единственное.

2′) $\gamma = 90° - \alpha$, $c = b\cos\alpha$.

Пусть $b\sin\alpha < a$. Тогда существуют два угла, синусы которых равны $\dfrac{b\sin\alpha}{a}$, — один их этих углов острый, а другой тупой. Но если $a \geqslant b$, то $\alpha \geqslant \beta$, а так как у треугольника не может быть двух тупых углов, то β — острый угол и решение единственно. Если $a < b$, существуют два угла β_1 и β_2 ($\beta_2 = 180° - \beta_1$), синусы которых равны $\dfrac{b\sin\alpha}{a}$. В этом случае задача имеет два решения:

2″) $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1$, $\quad c_1 = \dfrac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$;

$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2$, $\quad c_2 = \dfrac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha}$.

Задача 11*. Можно ли построить параллелограмм со сторонами 1 см, 3 см и углом 45° между его диагоналями?

Решение.

I способ. Допустим, что такой параллелограмм $ABCP$ (рис. 68) существует. Обозначим точку пересечения его диагоналей и отрезки $AO = x$, $PO = y$. По теореме косинусов имеем:

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 9 = x^2 + y^2 + 2xy\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

откуда $x^2 + y^2 = 5$.

Далее получаем $y = \sqrt{x^2 - 5}$,

$1 = 2x^2 - 5 - \sqrt{x^2 - 5} \cdot x\sqrt{2}$,

$(x^2 - 5)\,2x^2 = 4x^2 - 24x^2 + 36$,

$x^4 - 7x^2 + 18 = 0$.

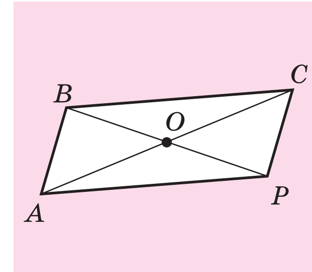


Рис. 68

Поскольку данное уравнение не имеет действительных корней, то делаем заключение, что такого параллелограмма не существует.

II способ. Допустим, что такой параллелограмм существует. Выразим его площадь S через диагонали и угол между ними (в обозначениях первого способа решения).

$$\begin{cases} 9 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 45°, \\ 1 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 45°, \end{cases}$$

отсюда $8 = 4xy\cos 45°$, $2 = xy\cos 45°$. Площадь параллелограмма $S = 0{,}5 \cdot 2x \cdot 2y \sin 45° = 2xy \sin 45°$. Поскольку $\sin 45° = \cos 45°$, то получаем $S = 4$. Однако площадь параллелограмма не может превышать произведение двух его смежных сторон на синус угла между ними, равного 90°, т. е. в нашем случае не может превышать значение, равное 3. Противоречие. Остается заключить, что такой параллелограмм построить нельзя.

? **1.** Что означают слова «решение треугольника»? Сформулируйте три основные задачи на решение треугольника и объясните, как они решаются.
2. Объясните, как определить высоту предмета, основание которого недоступно.
3. Объясните, как измерить расстояние до недоступной точки.
4. Какие три элемента треугольника однозначно определяют треугольник?

Задания

Устные упражнения **61—62**.

61. Верно ли равенство: а) $\sin^2 145° + \cos^2 145° = \sin^2 30° + \cos^2 30°$; б) $\cos^2\alpha - 1 = (1 - \cos\alpha)(\cos\alpha + 1)$; в) $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$?

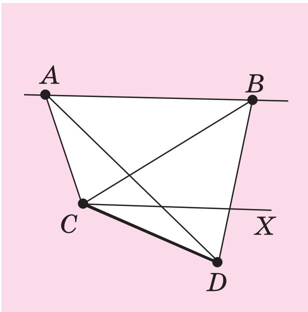


Рис. 69

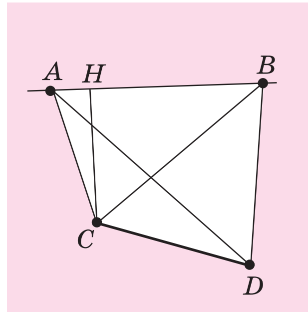


Рис. 70

62. Найдите произведение $\operatorname{tg} 37° \cdot \operatorname{tg} 53°$. Придумайте еще такой пример.

63. а) Через данную точку C надо провести прямую, параллельную недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 69).

Р е ш е н и е. 1) Измеряем $CD = d$.

2) Измеряем углы: $\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$,

$$\angle ADC = \gamma \text{ и } \angle BDC = \delta.$$

3) Решаем треугольник ACD по стороне l и прилежащим к ней углам α и γ, находим AC.

4) Аналогично решаем треугольник BCD, находим BC.

5) Решаем треугольник ABC по двум сторонам AC и BC и углу между ними β, находим $\angle CAB = \angle A$.

6) Строим угол $ACX = 180° - \angle A$, получаем искомую прямую CX, параллельную прямой AB.

б) Через точку C надо провести перпендикуляр к недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 70).

64. Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, а угол между диагоналями 30°.

65*. Две стороны треугольника равны 25 см и 30 см, а его площадь составляет 300 см^2. Найдите третью сторону.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $CB = a = 25$ см, $CA = b = 30$ см, $S = 300$ см^2. Тогда $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$, откуда

$$300 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 30 \sin C; \ \sin C = \frac{4}{5}.$$

Отсюда $\cos C = \pm\sqrt{1 - \sin^2 C} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$.

Необходимо рассмотреть два случая: а) $\cos C = \frac{3}{5}$. Тогда угол C — острый, и $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \frac{3}{5} = 25^2$, т. е. $AB = 25$ (см).

б) $\cos C = -\frac{3}{5}$. Тогда угол C — тупой, и $AB^2 = 25^2 + 30^2 + 2 \cdot 25 \times 30 \cdot \frac{3}{5} = 2425$; $AB = \sqrt{2425} = 5\sqrt{97}$ (см).

О т в е т: 25 см или $5\sqrt{97}$ см.

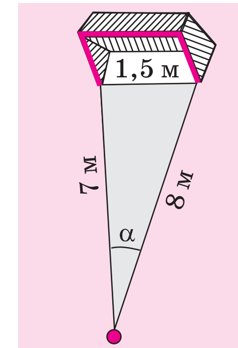


Рис. 71

66. Шайба находится в точке на расстоянии 7 м и 8 м от стоек ворот. Найдите угол, при котором шайба попадет в ворота, если она не отрывается ото льда, а ширина ворот 1,5 м (рис. 71).

67. Наблюдатель находится на расстоянии 25 м от дерева, высоту которого он хочет найти. Основание дерева он видит под углом 15°, а вершину — под углом 45° к горизонту. Какой высоты это дерево?

68. В треугольнике две стороны соответственно равны 27 см и 16 см, а угол между ними 60°. Найдите периметр треугольника.

69. а) Две стороны параллелограмма соответственно равны 11 см и 9 см, а угол между ними 100°. Найдите длину большей диагонали параллелограмма.

б) Две стороны параллелограмма соответственно равны 12 см и 10 см, а угол между ними 80°. Найдите длину меньшей диагонали параллелограмма.

70. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 2,5 дм, а угол между боковыми сторонами равен 45°.

71. Две стороны остроугольного треугольника равны 13 см и 14 см, а его площадь 84 см^2. Найдите третью сторону треугольника.

72. В треугольнике CKM $CM = 3$ см, $CK = 5$ см, $\cos C = 0{,}8$. Найдите высоту MH треугольника CKM и его площадь.

73. В треугольнике одна сторона равна 8 дм, а прилежащие к ней углы — 45° и 30°. Найдите периметр и площадь треугольника.

74. а) В треугольнике PKH $PK = 6$ дм, $KH = 5$ дм, $\angle PKH = 100°$, HE — медиана. Найдите длину медианы HE и площадь треугольника PEH.

б) В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle A = 65°$. Через середину E стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K, причем $\angle KEB = 20°$. Найдите площадь треугольника BEK, если $BK = 5$ м.

75. а) В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, $AB = 5$ дм, $\angle EAD = 30°$, $\angle ABC = 100°$. Найдите площадь параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$ см, $AD = 5$ см, $BD = 6$ см. Найдите угол CBD и площадь параллелограмма.

76. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены его высота и медиана, равные соответственно 12 и 15. Найдите стороны и синусы углов этого треугольника.

77. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 15°$, $BC = 4\sqrt{6}$. Найдите длину стороны AC.

78. В треугольнике ABC $\angle C = 120°$, $BC : AC = \left(\sqrt{3} - 1\right) : 2$. Найдите угол B.

79. Угол между двумя радиусами окружности равен 16°. Найдите длину хорды, соединяющей концы этих радиусов, если известно, что диаметр окружности равен 10 дм.

80. Тупоугольный или остроугольный треугольник со сторонами 104 дм, 156 дм и 182 дм?

81. Установите вид треугольника со сторонами: а) 9 см, 12 см и 15 см; б) 12 см, 16 см и 21 см; в) $\sqrt{8}$ см, $\sqrt{12}$ см и $\sqrt{14}$ см и найдите его площадь.

82. Установите вид треугольника, в котором квадрат одной стороны: а) больше; б) меньше суммы квадратов двух других сторон.

83. Диагональ прямоугольника равна 7,5 см, а угол между диагоналями равен 48°. Найдите площадь прямоугольника.

84. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его боковой стороне, равна 16 см, а угол при его основании равен 35°. Найдите площадь и периметр треугольника.

85. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK. Найдите длину отрезков BC и BK, если $AK = 54$ см, $KC = 24$ см, $AB = 90$ см.

86. а) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CD; $\angle A = 15°$, $AC = \sqrt{3}$. Найдите AD.

б) В равнобедренном треугольнике ABC основание AB равно $\sqrt{5}$, $\angle A = 30°$. Найдите биссектрису AE этого треугольника.

87. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD $AD = 2$ см, $BD = 2{,}6$ см, $\sin A = 0{,}6$. Найдите площадь трапеции.

88. Диагональ BD параллелограмма перпендикулярна к стороне AB, $AB = 5$ см, $\operatorname{tg} A = 1$. Найдите высоты параллелограмма и его площадь.

89. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой $\angle B = \angle C = 135°$, $\angle CAD = 15°$, $BC = 2$ дм.

90. Найдите длину отрезка BD (рис. 72), если известно, что $AB = 5{,}8$ м.

91*. В треугольнике ABC известны сумма сторон a и b и углы A и B. Можно ли по этим данным найти стороны a и b?

92. В треугольнике ABC угол ABC равен 80°, угол BCA — 40°, $BC = 2\sqrt{3}$ м. Найдите длину стороны AC.

93*. Острый угол ромба равен β, а его большая диагональ равна d. Найдите сторону ромба, его другую диагональ и площадь.

94. а) В прямоугольной трапеции основания a и $2a$, а острый угол равен α. Найдите периметр трапеции.

б) В прямоугольной трапеции большая боковая сторона равна меньшему основанию и равна b. Острый угол трапеции равен δ. Найдите площадь трапеции.

95*. В параллелограмме $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, а угол между высотами BH и BK равен β. Найдите площадь параллелограмма.

96. Если на горизонтальной поверхности земли предполагают рассадить деревья на расстоянии $a = 4{,}5$ м (рис. 73), то на каком расстоянии одну от другой следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма, имеющему наклон к горизонту $\alpha \approx 21°$?

97. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC, если:

а) $BC = 17$ см, $\angle A = 40°$, $\angle C = 75°$;

б) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 110°$;

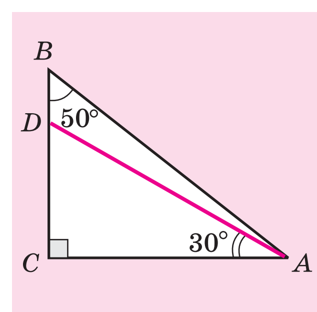


Рис. 72

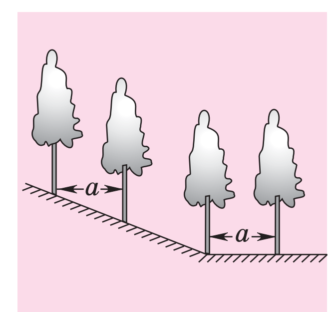


Рис. 73

в) $AC = 15$ см, $\angle A = 40°$, $\angle C = 50°$;

г) $BC = 5$ см, $\angle A = 40°$, $AB = 2$ см.

98. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, диагональ которого равна d.

99*. В остроугольном треугольнике ABC высота $BD = d$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите медиану AM этого треугольника.

100*. В равнобедренном треугольнике ABC BM — медиана, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$, $BC = a$. Найдите длину отрезка BM.

101*. В треугольнике ABC $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$, точка D принадлежит стороне AC, $\angle ABD = \beta$. Найдите длину отрезка BD.

102*. В остроугольном треугольнике ABC высота BH равна h, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

103*. а) В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle BAC = 2\alpha$, AE — биссектриса, $BE = p$. Найдите площадь треугольника ABC.

б) В равнобедренном треугольнике CKE $CK = KE$, $\angle KCE = \beta$, CM — биссектриса, $CK = b$. Найдите площадь треугольника CKM.

104*. Найдите площадь трапеции, основания которой m и n, а прилежащие к основанию m углы равны α и β.

105*. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найдите: а) биссектрису BF; б) медиану AM; в) высоты BH и CK.

106*. В треугольнике ABC дано: $BC = a$, $BA = c$, $\angle B$. Найдите: а) $\angle A$; б) $\angle C$; в) AC; г) медиану BK; д) медиану AM; е) биссектрису CP; ж) биссектрису CO; з) высоту BH; и) высоту AF; к) площадь.

107*. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Вычислите: а) угол A; б) угол B; в) угол C; г) угол между медианами AM и CO; д) угол между биссектрисами AF и BK; е) угол между медианой BE и высотой AH; ж) площадь.

108*. По данным на рисунке 74 найдите радиус основания конуса.

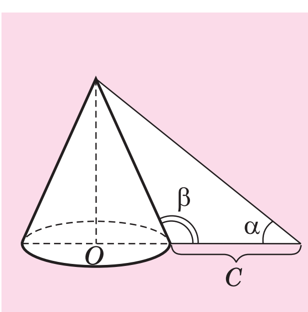


Рис. 74

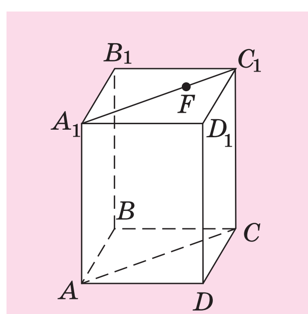


Рис. 75

109*. На диагонали A_1C_1 основания прямоугольного параллелепипеда (рис. 75) с ребрами $AD = 3$ м, $DC = 4$ м, $DD_1 = 5$ м взята точка F такая, что $A_1F : FC = 2 : 1$. Сравните $\operatorname{tg}\angle ACA_1 + \operatorname{tg}\angle FAC$ с $\operatorname{tg}\angle ACF$.

Повторение главы I

Исторические сведения

Насирэддин Туси (1201—1274)

Накопление и систематизация вычислительных приемов решения геометрических задач привели к выделению новой области математики, которую назвали в конце XVI в. тригонометрией (т. е. треугольникоизмерением, понимая под этим косвенное измерение на основе свойств треугольника).

Тригонометрия, которую можно считать и ветвью алгебры, и ветвью геометрии, имеет геометрические истоки. Одним из первых тригонометрические таблицы составил древнегреческий астроном Гиларх во II в. до н. э. Значительный вклад в развитие тригонометрии сделали индийские математики X—XII вв., которым были известны и основное тригонометрическое тождество, и некоторые формулы приведения, а также ученые Средней Азии. Так, Насирэддин Туси в «Трактате о полном четырехсторонннике» дает основания сферической тригонометрии. В этом труде тригонометрия излагается как самостоятельный отдел математических знаний. Определенный вклад в развитие тригонометрии внесли и европейские математики. Например, в XV в. немецкий математик И. Мюллер написал труд «Пять книг о различного рода треугольниках», в котором было предпринято систематическое изложение тригонометрии. При решении треугольников уже с XVI в. применялись не только теоремы синусов и косинусов, но иногда и теорема тангенсов*: $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}$.

Контрольные вопросы

1. Объясните, как определяются тригонометрические функции углов.

2. Какие тригонометрические тождества вы знаете? Запишите и объясните их.

3. Сформулируйте теорему синусов и приведите примеры ее применения.

4. Сформулируйте теорему косинусов и приведите примеры ее применения.

5. Какие формулы площади треугольника вы знаете? Запишите и объясните их.

6. Объясните на примерах суть задач на решение треугольников.

Задания

110. Найдите неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника по следующим данным: а) катет $a = 20$ см, гипотенуза $c = 29$ см; б) катеты $a = 24$ см, $b = 7$ см; в) гипотенуза $c = 27$ см, $\beta = 24°$; г) катет $a = 43$ см, $\alpha = 34°$.

111. а) Найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла, и площадь прямоугольного треугольника с острым углом 60° и прилежащим к нему катетом, равным 10 см.

б) Найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла, и площадь прямоугольного треугольника с катетом $8\sqrt{2}$ см, если известно, что он равнобедренный.

112. а) В треугольнике ABC высота AD разделила основание BC на отрезки $BD = 2\sqrt{3}$ см, $DC = 8$ см, $\angle ABC = 60°$. Найдите стороны AB и AC и площадь данного треугольника.

б) В треугольнике ABC сторона BC образует с основанием AC угол, равный 30°, а высота, проведенная из вершины B, делит основание на отрезки $AD = 12$ см, $DC = 5\sqrt{3}$ см. Найдите боковые стороны и площадь данного треугольника.

113. Сторона ромба равна a, а его острый угол α. Найдите диагонали ромба.

114. Найдите: а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ и $0° < \alpha < 90°$;

б) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

в) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $270° < \alpha < 360°$;

г) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$.

115. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

116. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{13}$. Найдите косинус третьего угла треугольника.

117. Косинусы двух углов треугольника равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Найдите синус третьего угла треугольника.

118. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$, найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

119. Вычислите: а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{tg} 75°$.

120*. Вычислите $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$.

121*. Вычислите $\sin\alpha$, если $\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 0{,}8$.

122. Вычислите: а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $0° < \alpha < 90°$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $90° < \alpha < 180°$.

123*. Упростите выражение:

а) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$; г) $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\cos^2\alpha}$;

б) $\cos 15° - \sin 15°$; д) $\sqrt{2}\,(\sin^4 22°30' - \cos^4 22°30')$;

в) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$; е) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

124. Докажите неравенство:

а) $\sin 30° + \cos 45° > 1{,}2$; в*) $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$;

б) $\sin 45° + \cos 60° > 1{,}1$; г*) $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$, $0° < \alpha < 90°$.

125*. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \geqslant \cos 60°$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}} < \operatorname{tg} 135°$;

б) $\frac{2}{\sqrt{x}} \leqslant \sin 150°$; г) $x^4 - 10x^2 + 9\sin 90° > 0$.

126. Даны диагонали параллелограмма a и b и угол α между ними. Найдите периметр параллелограмма.

127. В треугольнике две стороны 20 см и 21 см, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону треугольника.

128. Стороны треугольника 13 дм, 14 дм и 15 дм. Найдите его углы.

129. Дан треугольник со сторонами a, b, c, причем угол γ, противоположный стороне c: а) острый; б) прямой; в) тупой. В каком из этих случаев сторона c наибольшая; наименьшая?

130. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 30°$. Найдите отношение $\frac{AB}{AC}$.

131. В треугольнике две стороны равны 5 см и 6 см. Может ли угол, противолежащий меньшей из этих сторон, быть тупым?

132. В треугольнике ABC $AB = 15$ дм, $AC = 10$ дм. Может ли синус угла B быть равным 0,75?

133. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна 12 см и наклонена к большему основанию под углом 21°.

134. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle CAD = 15°$, $\angle B = \angle C = 135°$, $BC = 2$ см. Найдите длину средней линии трапеции.

135. Периметр параллелограмма 30 см, площадь — 36 см^2, а синус острого угла — $\frac{2}{3}$. Найдите высоты параллелограмма.

136*. Докажите, что площадь треугольника равна $S = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$, где a — длина его стороны, α и β — прилежащие к этой стороне углы треугольника.

137*. Известно, что длины сторон и площадь некоторого треугольника выражаются четырьмя последовательными натуральными числами. Найдите сумму синусов углов этого треугольника.

138*. В треугольнике ABC $AB = c$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 15°$. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины угла A.

139*. В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = c$, $BC = a$ и угол γ между ними; BM — медиана, BK — биссектриса. Найдите длину отрезка MK.

140*. Внутри острого угла величиной 40°, взята точка на расстоянии 13 см и 14 см от его сторон. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

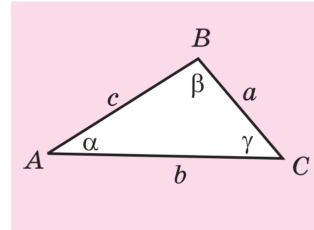


Рис. 76

1. Дан треугольник, стороны которого равны a, b, c, а углы, противолежащие указанным сторонам, соответственно равны α, β, γ (рис. 76). Какие из соотношений выражают: а) теорему синусов; б) теорему косинусов:

1) $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma}$;

2) $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$;

3) $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$;

4) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\alpha$;

5) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$;

6) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равна $\sqrt{2}$, угол при основании равен 30°, AD — биссектриса. Найдите AD.

3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей ромба равна сумме квадратов всех его сторон.

4. Площадь треугольника $3\sqrt{3}$ см^2, а две его стороны равны 3 см и 4 см. Найдите третью сторону треугольника.

5. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 10 см, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 12 см. Найдите площадь треугольника.

Вариант 2*

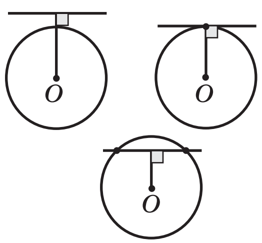
1. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 1 дм, а угол при вершине равен 45°.

2. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 16 см, а медиана, проведенная к этой стороне, равна 12 см.

3. Стороны треугольника равны 5 см, 4 см, 3 см. Найдите его биссектрису, проведенную из вершины большего угла.

4. Диагональ равнобедренной трапеции длиной, равной a, образует с основанием угол 75°. Найдите площадь трапеции.

5. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известна гипотенуза c и сумма синусов острых углов равная p.



Глава II

Окружность

§ 3. Дуги, хорды, центральные и вписанные углы и их свойства

Как вы уже знаете, окружностью называется геометрическая фигура, образованная из множества всех точек плоскости, которые находятся на одном и том же расстоянии от данной точки этой плоскости.

Фигуру, представляющую собой множество точек плоскости, каждая из которых обладает определенным свойством, называют ***геометрическим местом точек*** (сокращенно обозначают ГМТ). Поэтому, например, окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром окружности. Отрезок (R), соединяющий центр окружности с любой ее точкой, называется радиусом окружности; отрезок (AB), соединяющий две точки окружности, — хордой окружности; хорда (MP), проходящая через центр окружности, — диаметром окружности (рис. 77).

Две разные точки окружности делят ее на две части, которые называются ***дугами***. Для отличия этих дуг отмечают на них третью точку, а не только концы дуги. Например, на рисунке 77 выделена дуга ACB (обозначается: $\cup ACB$). Если понятно, о какой дуге идет речь, то ее обычно обозначают двумя заглавными латинскими буквами, которые ставят у концов дуги, например (см. рис. 77) дуга KP.

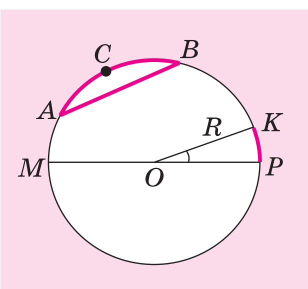


Рис. 77

Дуга, опирающаяся на диаметр, называется ***полуокружностью***. На рисунке 77 $\cup MCP$ и $\cup MP$ — полуокружности.

Угол, вершиной которого является центр окружности, называется ***центральным углом***. На рисунке 77 углы KOP, KOM, MOK, MOP — центральные.

Дуги можно измерять в градусах. Если дуга окружности меньше полуокружности, то за ее градусную меру принимают градусную меру центрального угла, стороны которого проходят через концы дуги. Например, $\cup KP = \angle KOP$, $\cup MP = \angle MOP$. Если дуга окружности больше полуокружности, то ее градусная мера находится, например, так: $\cup MPK = 360° - \cup MAK$. Отметим также, что градусная мера полуокружности равна 180°.

Для измерения дуг используются свойства, аналогичные свойствам измерения углов. Например, $\cup MC = 45°$, $\cup CB = 90°$, $\cup AMC = \cup BC = 90°$, $\cup MCB = \cup MC + \cup CB = 135°$, $\cup MAB = 360° - 135° = 225°$ (рис. 78).

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется ***вписанным углом***. На рисунке 79 угол B — вписанный, дуга AKC расположена внутри его (в таких случаях часто говорят, что вписанный угол ABC опирается на дугу AKC).

Т е о р е м а (об измерении вписанного угла). **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим три случая.

1. Диаметр BC окружности лежит на стороне вписанного угла ABC (рис. 80, a). Проведем радиус OA. Тогда имеем: $\angle 1 = \angle 2$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ABO); $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (по свойству внешнего угла треугольника). Отсюда делаем вывод, что $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle 3$; угол 3 как центральный угол равен дуге AC. Поэтому $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AC$.

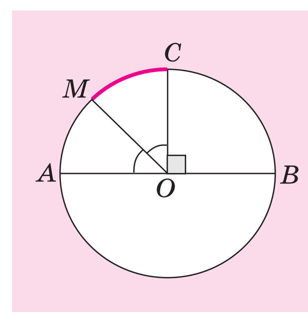


Рис. 78

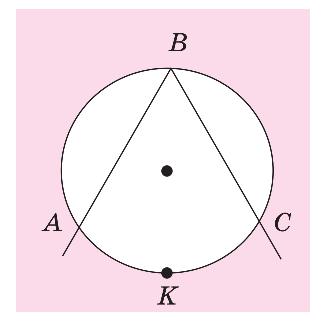


Рис. 79

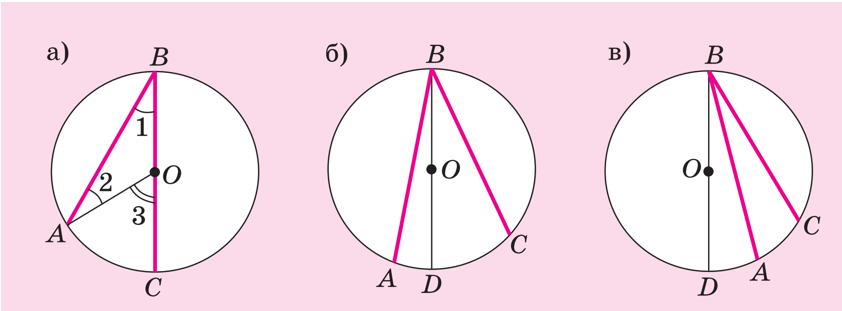


Рис. 80

2. Диаметр окружности находится внутри вписанного угла (рис. 80, *б*).

Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC$.

3. Диаметр окружности не лежит на стороне угла и не находится внутри его (рис. 80, *в*). Тогда $\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA = \frac{1}{2} \cup DC - \frac{1}{2} \cup DA = \frac{1}{2} (\cup DC - \cup DA) = \frac{1}{2} \cup AC$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны; вписанный угол, опирающийся на полуокружность (иначе говоря, опирается на диаметр), — прямой. Отметим также, что вписанные углы, опирающиеся на равные дуги окружности, равны.

Задача 1. Доказать, что угол ABC (рис. 81), вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой дуг AC и KM, из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.

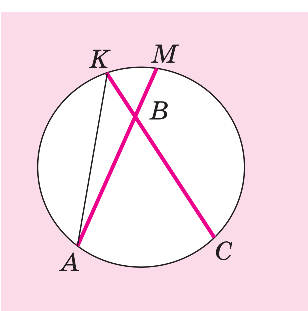


Рис. 81

Доказательство. Проведем хорду AK. Тогда $\angle KAM = \frac{1}{2} \cup KM$, $\angle AKC = \frac{1}{2} \cup AC$ (как вписанные углы), $\angle ABC = \angle KAM + \angle AKC$ (по свойству внешнего угла треугольника), поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup KM + \cup AC)$, что и требовалось доказать.

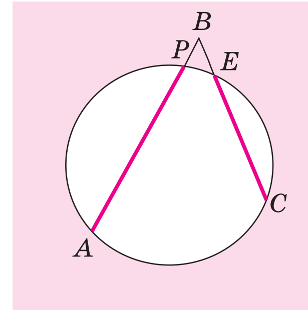


Рис. 82

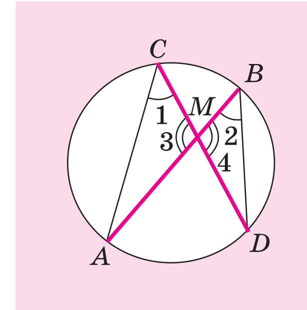


Рис. 83

Задача 2. Доказать, что угол ABC (рис. 82), вершина которого находится вне окружности, а стороны пересекают ее, измеряется полуразностью дуг AC и PE, заключенных между его сторонами.

Эту задачу решите самостоятельно.

Теорема. **Если две хорды AB и CD окружности пересекаются, то произведение $AM \cdot MB$ отрезков одной хорды равно произведению $CM \cdot MD$ отрезков другой хорды.**

Доказательство. Рассмотрим треугольники ACM и DBM (рис. 83). Они подобны по первому признаку подобия треугольников, поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), $\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные). Тогда имеем: $AM : MD = CM : BM$, откуда $AM \cdot BM = CM \cdot MD$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α (рис. 84). Как видно, любой вписанный угол с вершиной на дуге ACB измеряется половиной центрального угла AOB, равного 2α. Поэтому дуга ACB и представляет собой данное геометрическое место точек плоскости. Построить это ГМТ можно так: сначала построить $\angle OAB = (180° - 2\alpha) : 2 = 90° - \alpha$, далее — равнобедренный треугольник AOB с основанием AB и углом при основании, равным $90° - \alpha$, и провести дугу ACB окружности, радиус которой равен OA.

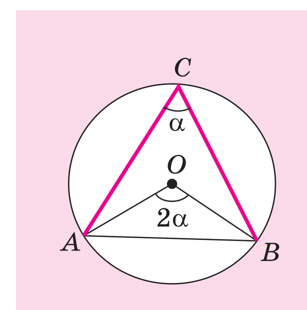


Рис. 84

Если проводить исследование, то можно заметить, что таким же свойством обладает и дуга, симметричная дуге ACB, относительно прямой AB.

? **1.** Как определяется градусная мера дуги?
2. Какой угол называется центральным углом окружности?
3. Объясните, какая дуга называется полуокружностью.
4. Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.
5. Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
6. Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.
7. Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд.

Задания

Устное упражнение **141**.

141. Верно ли, что: а) градусная мера центрального угла равна градусной мере заключенной между его сторонами дуги;

б) если две дуги равны, то любой угол, опирающийся на одну из них, равен любому углу, опирающемуся на другую;

в) если два вписанных угла равны, то равны и дуги, на которые они опираются;

г) точка, служащая общей серединой двух хорд окружности, является ее центром;

д) если прямая делит пополам некоторую хорду окружности, то она делит пополам и дугу, которая стягивается этой хордой;

е) геометрическим местом центров окружностей, проходящих через две данные точки A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB?

142. Постройте центральный угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 120°; д) 150°.

143. Постройте вписанный угол, равный: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 150°.

144. Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

145. Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC — дугу, равную 43°. Найдите угол BAC.

146. Разделите данную дугу окружности: а) на две равные дуги; б) на четыре равные дуги.

147. Докажите, что градусные меры дуг окружности, которые заключены между параллельными хордами, равны.

148. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам. Справедливо ли обратное утверждение?

149. Докажите, что, чем ближе хорда окружности к ее центру, тем больше ее длина.

150. Проведите через данную точку хорду окружности, которая делится ею пополам.

151. Как можно разделить пополам дугу окружности, центр которой не отмечен?

152. а) Докажите, что перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые он делит диаметр.

б) Применив утверждение *а*), постройте отрезок, средний пропорциональный между двумя данными отрезками.

153. Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то: а) угол C больше угла A; б) угол C больше угла B.

154. Хорда делит окружность на две дуги, градусные меры которых пропорциональны числам 4 и 5. Под каким углом эта хорда видна из центра окружности?

155. Хорда AB параллельна диаметру CD. Найдите AB, если $AC = 3$, $CB = 4$.

156. Точки A, B и C лежат на окружности. Найдите угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности.

157. Точки A, B и C лежат на окружности. Найдите длину хорды AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности равен 8 см.

158. Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AM параллельны. Докажите, что хорда CM является диаметром окружности.

159. На окружности взяты четыре точки: A, B, C и D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен 60°?

160. Хорда пересекает диаметр окружности под углом 40° и делит его на два отрезка, равные 2 см и 4 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

161. В окружности на расстоянии 1 дм от центра даны две перпендикулярные хорды, каждая из которых равна 6 дм. Найдите отрезки, на которые делятся эти хорды точкой их пересечения.

162. Из двух пересекающихся хорд окружности одна разделена точкой пересечения на части, равные 12 дм и 18 дм, а другая — в отношении 3 : 8. Найдите длину другой хорды.

163. Постройте с помощью циркуля и линейки угол, вписанный в окружность, который равен: а) 150°; б) 135°.

164. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K. Найдите угол BKC, если дуга AD равна 54°, а дуга BC — 70°.

165. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MD, если:

а) $AM = 5$ см, $BM = 2$ см, $CM = 2{,}5$ см;
б) $AM = 16$ см, $BM = 9$ см, $CM = MD$.

166. Диаметр AB перпендикулярен хорде CK и пересекает ее в точке P. Найдите CK, если $AP = 4$ см, $PB = 8$ см.

167*. Докажите, что если диаметр AB окружности перпендикулярен ее хорде CD в точке K, то выполняется равенство $CD^2 = 4AK \cdot BK$.

168. Найдите острый угол между двумя секущими, проведенными из точки, взятой вне окружности, если дуги, заключенные между этими секущими, равны 52° и 140°.

169. В круге проведена хорда, стягивающая дугу в 58°. Длина хорды 40 см. Найдите радиус круга.

170. Постройте треугольник по данным: а) углу и двум высотам, одна из которых проведена из вершины данного угла;

б) стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

171*. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды. Докажите, что сумма квадратов отрезков, на которые точка пересечения делит хорды, равна квадрату диаметра окружности.

172*. Через концы A и B диаметра окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке P. Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$.

§ 4. Взаимное расположение прямой и окружности

1. Касательная к окружности

Прямая и окружность могут иметь или одну общую точку, или две общие точки, или совсем не иметь общих точек (рис. 85, *а*, *б*, *в*). Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется ***касательной к окружности***; общую точку называют ***точкой касания прямой и окружности*** (рис. 85, *а*).

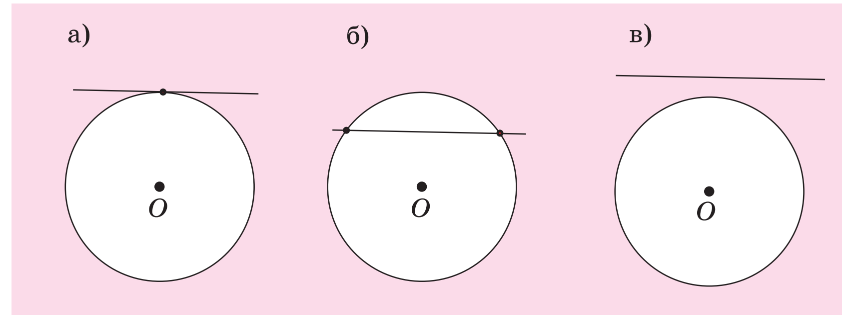


Рис. 85

Т е о р е м а (признак касательной). **Если прямая перпендикулярна радиусу в его конце, находящемся на окружности, то она является касательной к окружности.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая AB перпендикулярна радиусу OA, конец которого — точка A — лежит на окружности (рис. 86). Тогда произвольная точка X прямой AB, отличная от точки A, удалена от центра O на расстояние OX, большее OA, поскольку $OD = OA$, $OX = OD + DX > AO$ (гипотенуза прямоугольного треугольника длиннее его катета). Поэтому точка X лежит вне круга. Таким образом, прямая AB имеет только одну общую точку A с окружностью, значит, она является касательной к ней.

О б р а т н а я т е о р е м а. **Если прямая касается окружности, то ее радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.** (Докажите самостоятельно.)

Признак касательной используем для ее построения с помощью циркуля и линейки. Для этого точку A, находящуюся вне окружности (рис. 87), соединяем отрезком AO с центром окружности и строим на этом отрезке как на диаметре окружность. Точки B и B_1 являются

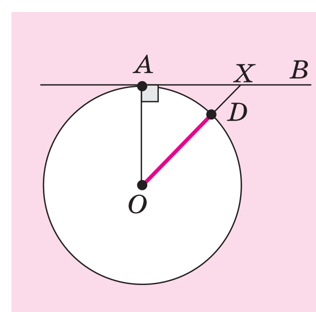


Рис. 86

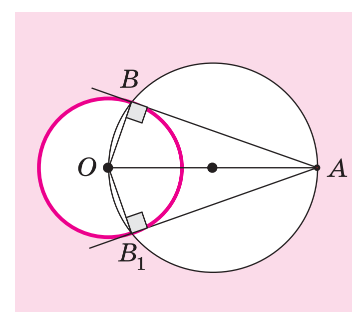


Рис. 87

точками касания прямых AB, AB_1 и окружности, поскольку углы B и B_1 — прямые.

Отметим также, что поскольку прямоугольные треугольники AOB и AOB_1 равны (по гипотенузе и катету), то $AB = AB_1$ и $\angle AOB = \angle AOB_1$. Таким образом, справедлива следующая теорема: **если из какой-нибудь точки провести две касательные к окружности, то их отрезки, заключенные между этой точкой и точками касания, равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла, образованного касательными.**

Рассмотрим теперь задачу об измерении угла между касательной и хордой, проведенной в точку касания.

Теорема. **Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, измеряется половиной дуги, которая стягивается этой хордой.**

Доказательство. *I способ.* Проведем хорду, параллельную касательной (рис. 88). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, CK и секущей BC; $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup BK$, так как $\angle 2$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BK.

Поскольку дуги BK и BC равны (объясните почему), то $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup BC$, что и требовалось доказать.

II способ. Проведем радиусы OB и OC (рис. 89), тогда $\angle 2 = \angle 3$ как углы при основании равнобедренного треугольника BCO; $\angle 1 + \angle 2 = 90°$ по свойству касательной; $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$ по свойству суммы углов треугольника. Отсюда имеем: $2(90° - \angle 1) + \angle 4 = 180°$; $2\angle 1 = \angle 4$; $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle 4 = \frac{1}{2} \cup BC$.

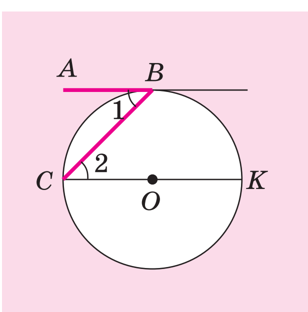


Рис. 88

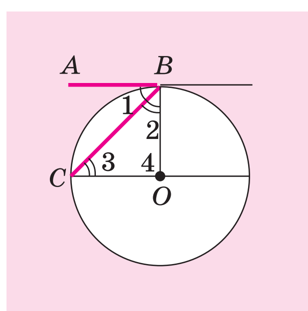


Рис. 89

Теорема (о касательной и секущей, проведенных к окружности). **Если через точку A, которая не лежит на окружности, проведены касательная AB и секущая AD, то квадрат отрезка касательной AB^2 равен произведению $AC \cdot AD$ отрезков секущей.**

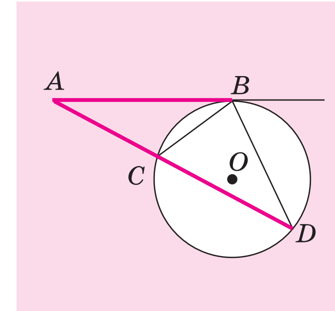


Рис. 90

Доказательство. Проведем хорды BC и BD (рис. 90). Тогда $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ ($\angle A$ — общий, $\angle ABC = \angle ADB$, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC). Из подобия треугольников имеем: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, откуда $AB^2 = AC \cdot AD$, что и требовалось доказать.

Подытоживая вопрос о взаимном расположении прямой и окружности, обоснуйте самостоятельно, что если расстояние от центра окружности до прямой:

а) больше ее радиуса, то прямая не имеет общих точек с окружностью;

б) равно радиусу, то прямая касается окружности;

в) меньше радиуса, то прямая пересекает окружность (рис. 91).

Справедливы и обратные теоремы. (Обратные теоремы сформулируйте и докажите самостоятельно.)

Задача. Хорда AA_1 окружности перпендикулярна радиусу OM и проходит через его середину. Найти длину хорды AA_1, если диаметр окружности равен 12 см.

(Решите самостоятельно.)

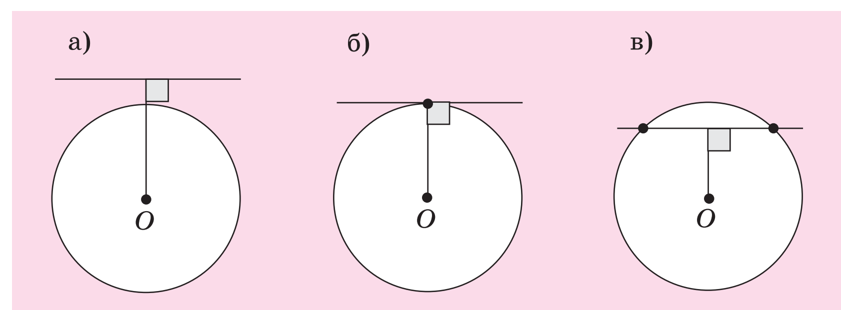
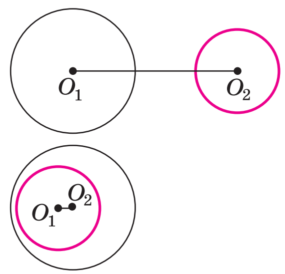
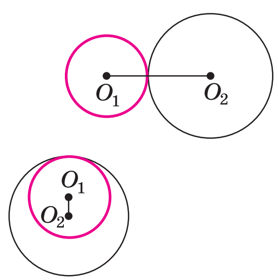
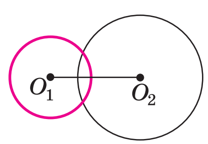


Рис. 91

2*. Взаимное расположение двух окружностей

Рассмотрим теперь взаимное расположение двух окружностей (проследите по таблице):

Окружности не имеют общих точек.		Расстояние между центрами окружностей больше суммы их радиусов. Расстояние между центрами окружностей меньше разности их радиусов.
Окружности касаются.		Внешнее касание: расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов. Внутреннее касание: расстояние между центрами окружностей равно разности их радиусов.
Окружности пересекаются.		Расстояние между центрами окружностей меньше суммы их радиусов и больше их разности.

Обоснуем один из случаев взаимного расположения двух окружностей. Докажем, например, что если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей.

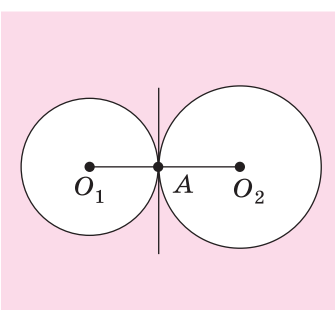


Рис. 92

Пусть окружности касаются в точке A, т. е. они касаются одной и той же прямой в точке A (рис. 92). Тогда радиусы этих окружностей, проведенные в точку касания, перпендикулярны этой общей касательной. Поскольку через точку, взятую на прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную ей, то точки O_1, A и O_2 лежат на одной прямой. Тогда по свойству измерения отрезков имеем: $O_1O_2 = AO_1 + AO_2$, что и требовалось доказать.

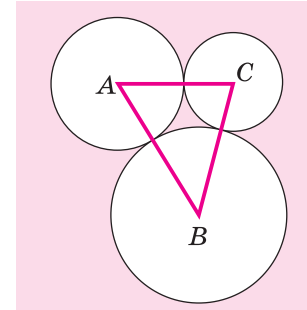


Рис. 93

Задача. Каждая из окружностей с центрами A, B и C на рисунке 93 касается двух других. Найти радиусы всех окружностей, если $AB = m$, $BC = n$, $AC = p$.

Решение. Обозначим радиусы окружностей через x, y и z. Поскольку окружности касаются, то $x + y = m$, $y + z = n$, $x + z = p$. Сложив левые и правые части всех равенств, получим $2(x + y + z) = m + n + p$, откуда $x + y + z = \frac{m+n+p}{2}$. Далее находим неизвестные радиусы: $x = \frac{m+n+p}{2} - (y + z) = \frac{m+n+p}{2} - n = \frac{m+p-n}{2}$; аналогично находим y и z.

?
1. Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?
2. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.
3. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.
4. Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
5. Докажите, что произведение отрезков секущей равно квадрату отрезка касательной (см. рис. 90).

Задания

Устные упражнения **173—174**.

173. Докажите, что прямая не может пересекать окружность в трех точках.

174. Докажите, что если прямая имеет с окружностью общую точку и не касается окружности в этой точке, то она имеет еще одну общую точку с окружностью.

175. Прямая AB касается окружности (с центром в точке O и радиусом, равным R) в точке B. Найдите AB, если: а) $OA = 2$ дм, $R = 1{,}5$ дм; б) $\angle AOB = 60°$, $R = 1{,}2$ дм.

176. Через точку окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу. Найдите угол между касательной и хордой.

177. Через концы хорды, равной радиусу, проведены две касательные. Найдите угол между этими касательными.

178. Постройте касательную к окружности: а) параллельную данной прямой; б) перпендикулярную данной прямой.

179. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла. Сколько решений имеет задача?

180. Даны окружность с центром O, радиус которой равен 4,5 см, и точка A, такая, что $OA = 9$ см. Через центр A проведены две касательные к окружности. Найдите угол между этими касательными.

181. Расстояние от точки A до центра окружности радиуса 5 равно 20. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности в точке B. Найдите расстояние AB.

182. Точки A и B разбивают окружность на две дуги AXB и AYB, причем $\angle AXB = 74°$. Через точку B проведена к окружности касательная CK (точка B лежит между точками C и K). Найдите: а) $\angle CBA$; б) $\angle ABK$.

183. Точки A и B разбивают окружность на две дуги AXB и ANB, градусные меры которых относятся как 7 : 17. Через точку A проведена касательная MN к окружности. Найдите угол между прямыми MN и AB.

184. Прямые MA и MB касаются окружности в точках A и B. Точка C симметрична центру окружности относительно точки B. Найдите угол AMC, если угол BMC равен α.

185. а) Угол между двумя касательными, проведенными из точки к окружности, равен 72°. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность разделена точками касания.

б) Найдите угол между двумя касательными, проведенными из точки к окружности, если градусные меры двух дуг, на которые окружность разделена точками касания, относятся как 4 : 1.

в) Найдите угол между двумя касательными, проведенными из точки к окружности, если величина одной из дуг, разделенных точкой касания, на 20 % больше другой.

186. Радиус окружности равен 8 см, хорда AB равна 12 см. Через точку A проведена касательная к окружности, а из точки B — хорда, параллельная этой касательной. Найдите расстояние между хордой и касательной.

187. Проведите касательную к окружности, параллельную произвольно взятому диаметру этой окружности.

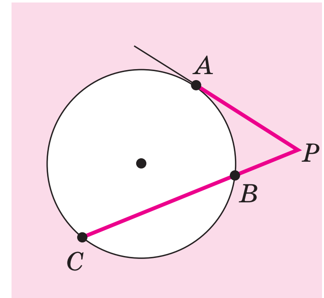


Рис. 94

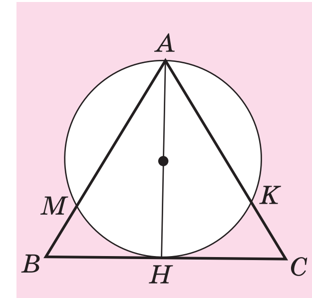


Рис. 95

188*. Как можно построить отрезок, равный длине хорды, концы которой недоступны?

189*. Через точку, данную на радиусе окружности, проведите хорду наименьшей длины.

190. На рисунке 94 даны отрезок PA касательной и хорда BC. Найдите длину отрезка PB, если: а) $PA = 4$, $BC = 10$; б) $PA = 6$, $BC = 4$.

191. Из точки A к окружности радиуса R проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания); $\angle A = \alpha$. Найдите: а) AB и AC; б) периметр треугольника ABC.

192. Две концентрические окружности (окружности с общим центром) имеют диаметры 10 и 26. К меньшей окружности проведена касательная. Найдите длину отрезка этой касательной от точки пересечения ее с большей окружностью до точки касания с меньшей.

193. Две окружности имеют радиусы 5 и 17. Длина отрезка их внешней касательной (общей касательной, которая не пересекает отрезок, соединяющий центры окружностей), заключенного между точками касания, равна 16. Найдите расстояние между центрами окружностей.

194. На рисунке 95 AH — диаметр, перпендикулярный прямой BC в точке H. Докажите, что $AB \cdot AM = AC \cdot AK$.

195. Окружность касается сторон угла A в точках B и C. Через произвольно взятую точку окружности проведена к ней касательная. Найдите периметр треугольника, образованного касательной и сторонами угла, если длина отрезка касательной, заключенного внутри угла, равна 5 см, $AB = 10$ см.

196*. Проведите прямую, отсекающую от данного угла A треугольник ABC периметра P.

197. В угол, равный 60°, вписаны две окружности, которые касаются сторон угла и друг друга. Найдите радиус одной из этих окружностей, если радиус другой равен R.

198. Две окружности имеют общую точку C и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Верно ли, что точка C принадлежит окружности с диаметром AB?

199. Параллельно прямой OO_1, соединяющей центры O и O_1 двух равных окружностей, проведена прямая, пересекающая окружность с центром O в точках A и B, а другую окружность — в точках A_1 и B_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = OO_1$.

200. Постройте окружность и проведите произвольно ее хорду. Постройте хорду окружности: а) симметричную проведенной хорде относительно центра окружности; б) симметричную проведенной хорде относительно прямой, на которой лежит определенный диаметр окружности; в) гомотетичную проведенной хорде с центром гомотетии, определенным вами.

201. Стороны треугольника равны 51 мм, 85 мм и 104 мм. Проведена окружность с центром, лежащим на большей стороне треугольника, и касающаяся двух меньших его сторон. Найдите длины отрезков, на которые большая сторона делится центром окружности.

202*. В угол вписаны три окружности таким образом, что две из них с радиусами R и r проходят через центр третьей. Найдите радиус третьей окружности.

203*. В прямой угол вписана окружность радиуса R. Найдите радиус вписанной в этот угол окружности, касающейся данной окружности.

204*. В данный сектор впишите окружность, касающуюся ограничивающих его радиусов и дуги сектора.

205*. В данный прямой угол вписана окружность. Впишите в него еще одну окружность так, чтобы она касалась первой.

206*. Через точки A и B, лежащие вне окружности, проведена прямая, которая пересекает окружность. Докажите, что расстояние AB больше, чем сумма длин AC и BD — отрезков касательных к окружности (C и D — точки касания), или меньше, чем их разность.

207*. Через точку A, лежащую на окружности радиуса 5 см, проведена касательная AM. Отрезок $OM = 8$ см (O — центр окружности) пересекает ее в точке B. Найдите градусные меры дуг окружности с концами в точках A и B.

208*. Докажите, что если через точку касания двух окружностей проведены две секущие и концы их соединены хордами, то эти хорды параллельны.

209*. К двум внешне касающимся окружностям, радиусы которых равны r и $\frac{1}{2}r$, проведите общую касательную и постройте окружность, касающуюся данных окружностей и их общей касательной.

210*. К двум окружностям радиусов R и r проведены две касательные: внешняя и внутренняя (пересекающая отрезок, соединяющий центры окружностей). Докажите, что $d_1^2 - d_2^2 = 4Rr$, где d_1 и d_2 — отрезки внешней и внутренней касательных, заключенные между точками касания.

§ 5. Вписанные и описанные многоугольники

Определение. **Если все вершины многоугольника принадлежат окружности, то такой многоугольник называется вписанным в окружность, а окружность — описанной около многоугольника** (рис. 96, *а*).

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то такой многоугольник называется описанным около окружности, а окружность — вписанной в многоугольник (рис. 96, *б*).

Теорема. **Около любого треугольника можно описать окружность и только одну.**

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 97). Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам AB и AC, тогда $OA = OB = OC$, то есть точка O равноудалена от вершин B и C, следовательно, она лежит и на серединном перпендикуляре к стороне BC. Окружность с центром O и радиусом OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC.

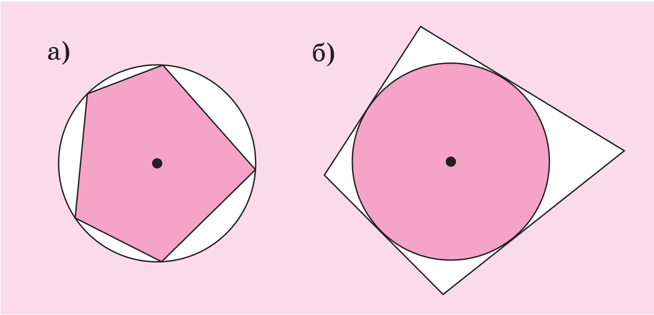


Рис. 96

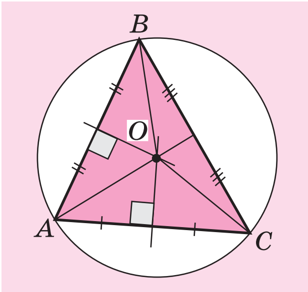


Рис. 97

2. Допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудален от его вершин и поэтому совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Теорема доказана.

Итак, *серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке* — центре описанной окружности.

Центр описанной около треугольника окружности лежит внутри его, если треугольник остроугольный; совпадает с серединой гипотенузы, если треугольник прямоугольный; лежит во внешней области треугольника, если треугольник тупоугольный.

Воспользуемся этими результатами для доказательства следующего утверждения.

Теорема. **Три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.**

Доказательство. Проведем через вершины A, B, C треугольника ABC прямые, параллельные соответственно сторонам BC, AC, AB, до их взаимного пересечения в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 98, *а*).

Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC. В треугольниках ABC и A_1BC сторона BC является общей, угол ACB равен углу A_1BC и угол ABC равен углу A_1CB как накрест лежащие при параллельных прямых AC, A_1C_1 и AB, A_1B_1. Тогда треугольники ABC и A_1BC равны, и, следовательно,

$$AB = A_1C,\ AC = A_1B.$$

Аналогично

$$AC = BC_1,\ AB = B_1C,\ BC = B_1A,\ BC = AC_1.$$

Таким образом, точки A, B, C являются серединами отрезков B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно. Значит, прямые, содержащие высоты AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами к сторонам B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Эти прямые пересекаются в одной точке.

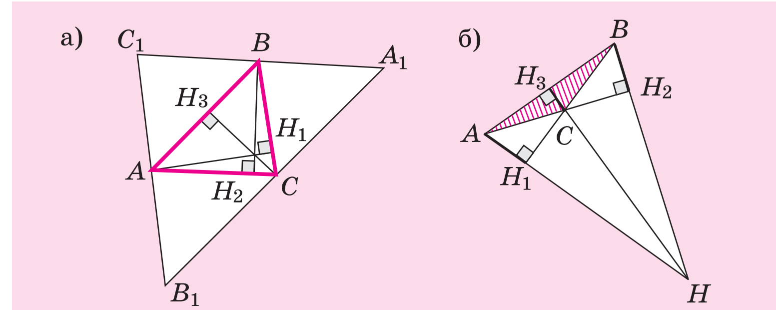


Рис. 98

Отметим, что точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, называется ***ортоцентром*** этого треугольника.

Эта точка может лежать вне треугольника (рис. 98, *б*). Этот случай имеет место для тупоугольного треугольника, у которого две высоты находятся вне треугольника. Для прямоугольного треугольника ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла. В остроугольном треугольнике ортоцентр находится внутри треугольника.

Теорема. **В любой треугольник можно вписать окружность и только одну.**

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис его углов A и B (рис. 99), тогда эта точка равноудалена от сторон AC, AB и BC. Следовательно, точка O лежит и на биссектрисе угла C. Длины перпендикуляров OK, ON и OM, опущенных из точки O к сторонам треугольника ABC, равны, поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, N и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, N, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, ON и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC.

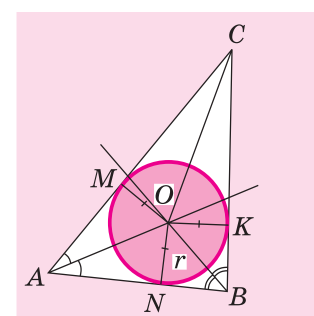


Рис. 99

2. В треугольник *можно вписать только одну окружность*. В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр

каждой окружности равноудален от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Итак, *биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке* — центре окружности, вписанной в треугольник.

Задача 1. Построить отрезок $\sqrt{ab}$, где a и b — данные отрезки.

Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Пусть CD — его высота, O — центр описанной окружности, $AD = a$, $DB = b$ — проекции катетов AC и BC на гипотенузу (рис. 100).

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{ab}.$$

Построение отрезка AB осуществляется так:

1. Проводим окружность с центром в произвольной точке O, радиус которой равен $\frac{a+b}{2}$.

2. Проводим в этой окружности произвольный диаметр AB и на нем откладываем отрезок $AD = a$, тогда $BD = b$.

3. Через точку D проводим луч, перпендикулярный диаметру AB; пусть C — точка пересечения этого луча с окружностью, $\angle ACB = 90°$, $CD = \sqrt{ab}$. Отрезок CD является искомым.

Задача 2. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Доказать, что $\angle BAH = \angle OAC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 101). Продлим AO до пересечения с окружностью в точке D. $\angle ADC = \angle ABC$, так как опираются на одну дугу; $\angle ACD = 90°$, так как опирается на диаметр. Тогда,

$$\angle BAH = 90° - \angle ABC = 90° - \angle ADC = \angle DAC.$$

Получили, что $\angle BAH = \angle OAC$.

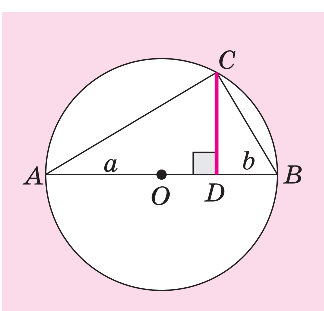


Рис. 100

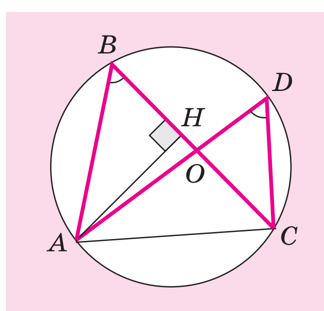


Рис. 101

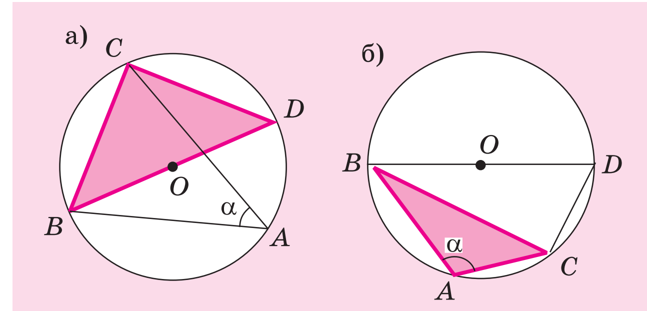


Рис. 102

Рассмотрим теперь некоторые с в о й с т в а вписанных и описанных треугольников. Так, **в любом треугольнике $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около него**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем диаметр BD окружности (рис. 102, *а*). Если центр этой окружности лежит внутри треугольника ABC, то $\angle D = \angle A = \alpha$ и $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Если центр окружности находится во внешней области треугольника (рис. 102, *б*), то $\angle D = 180° - \angle A = 180° - \alpha$ и $\frac{a}{\sin(180° - \alpha)} = 2R$. Поскольку $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то и в этом случае $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Если центр окружности лежит на стороне AC, то данная зависимость также имеет место. (Докажите самостоятельно.)

Докажем теперь, что **площадь треугольника со сторонами a, b и c, вписанного в окружность радиуса R, равна $S = \frac{abc}{4R}$**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, площадь треугольника ABC $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рис. 103). Поскольку $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, то $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Подставив $\frac{a}{2R}$ вместо $\sin\alpha$ в формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, имеем: $S = \frac{abc}{4R}$.

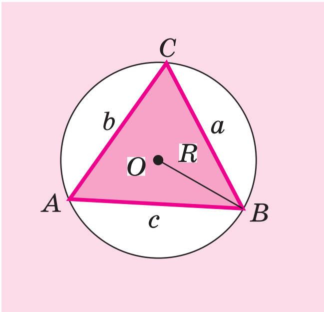


Рис. 103

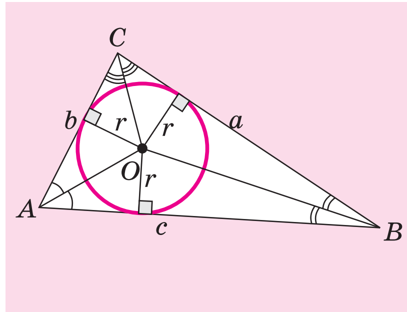


Рис. 104

Площадь треугольника, описанного около окружности, равна произведению его полупериметра на радиус окружности.

Действительно, площадь S треугольника ABC (рис. 104) равна сумме площадей треугольников AOB, BOC и AOC: $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Задача. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если его катеты относятся как $4:5$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

Решение. Радиус R окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине его гипотенузы. Обозначим катеты данного треугольника через $4x$ и $5x$, тогда его гипотенуза равна $\sqrt{(4x)^2+(5x)^2} = x \cdot \sqrt{41}$. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, опущенную на нее, или половине произведения катетов, поэтому $\frac{4x \cdot 5x}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{41} \cdot 12}{2}$, откуда $x = \frac{3 \cdot \sqrt{41}}{5}$. Тогда $R = \frac{3 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{41}}{10} = 12{,}3$.

Ответ: 12,3.

В отличие от треугольника около четырехугольника не всегда можно описать окружность; не всегда можно и вписать окружность в четырехугольник.

Теорема. **Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противолежащих углов равны 180°.**

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ (рис. 105) вписан в окружность. Тогда $\angle B = \frac{1}{2} \cup ADC$, $\angle D = \frac{1}{2} \cup ABC$. Сложив

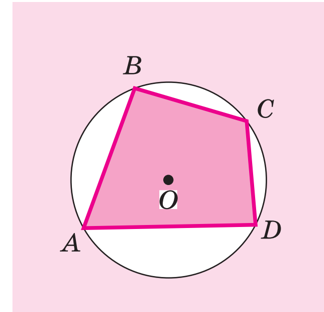


Рис. 105

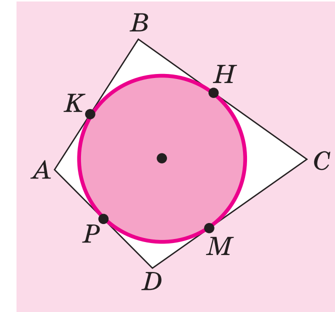


Рис. 106

эти равенства, имеем: $\angle B + \angle D = \frac{1}{2}(\cup ABC + \cup ADC) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Поскольку сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360° и доказано, что сумма двух его противолежащих углов равна 180°, то и сумма двух других его противолежащих углов равна 180°.

*Обратная теорема. **Если в четырехугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.**

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 105) $\angle B + \angle D = 180°$ (сумма углов A и C также равна 180°). Проведем через точки A, B и C окружность. Тогда вершина D четырехугольника $ABCD$ должна лежать на этой окружности (иначе вершина D находилась бы внутри круга или вне его и угол D не измерялся бы половиной дуги ABC, сумма углов B и D не была бы равна полусумме дуг ABC и ADC, т. е. не была бы равна 180°, что противоречит условию задачи).*

Следствия. 1. **Из параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность.**

2. **Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.**

Теорема. **В описанном около окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.**

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ (рис. 106) описан около окружности; его стороны касаются окружности в точках K, H, M и P. По свойству касательных, проведенных из точки к окружности, имеем: $AK = AP$, $BK = BH$, $CM = CH$, $DM = DP$. Сложив эти равенства, получим $AK + BK + CM + DM = AP + DP + CH + BH$, $AB + CD = BC + AD$, что и требовалось доказать.

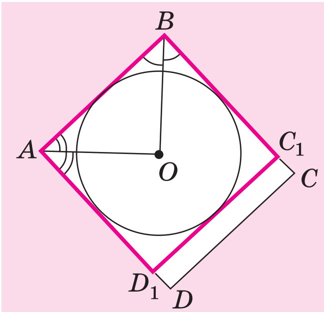


Рис. 107

*О б р а т н а я   т е о р е м а. **Если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 107) $AB + CD = BC + AD$. Проведем окружность, касающуюся сторон AB, AD и BC (центр O этой окружности находится на пересечении биссектрис углов A и B). Докажем, что эта окружность касается и четвертой стороны CD и поэтому является вписанной в четырехугольник $ABCD$. Допустим, что это не так. Тогда прямая CD или не имеет общих точек с данной окружностью, или является секущей. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

В первом случае проведем прямую C_1D_1, касающуюся окружности и параллельную CD. Тогда по свойству описанного четырехугольника ABC_1D_1 имеем: $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$. Поскольку $BC_1 = BC - C_1C$, $AD_1 = AD - D_1D$, то $C_1D_1 + C_1C + D_1D = BC + AD - AB$, так как $BC + AD - AB = CD$, то $C_1D_1 + C_1C + D_1D = CD$. Но последнее равенство выполняться не может (по свойству ломаной). Следовательно, наше допущение ошибочное, и первый случай не имеет места.

Второй случай рассмотрите самостоятельно.*

Рассмотрим теперь несколько задач на построение с помощью циркуля и линейки, при решении которых используются свойства окружности.

Задача 1. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла BAC, причем стороны AB — в данной точке K.

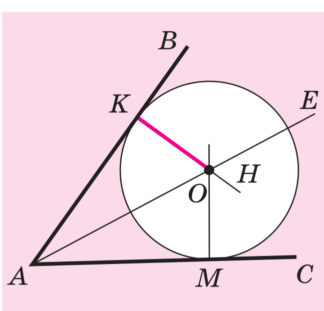


Рис. 108

А н а л и з. Искомая окружность (рис. 108) удовлетворяет двум условиям: 1) она касается сторон угла, поэтому ее центр находится на биссектрисе; 2) она касается стороны AB в данной точке K, поэтому ее центр должен лежать на перпендикуляре, проведенном к стороне через эту точку. Тогда точка пересечения биссектрисы угла и данного перпендикуляра является центром искомой окружности, а перпендикуляр, опущенный из этого центра на сторону угла, ее радиусом.

П о с т р о е н и е.

1. Проводим биссектрису AE угла BAC.
2. Строим перпендикуляр KH к прямой AB.
3. Отмечаем точку O пересечения AE и KH.
4. Проводим окружность радиусом OK, центр которой — точка O (см. рис. 108).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку стороны угла перпендикулярны радиусам OK и OM окружности, то они касаются окружности в точках K и M, причем стороны AB — в данной точке K.

И с с л е д о в а н и е. Задача имеет одно решение, так как существует только одна точка пересечения данных биссектрисы и перпендикуляра.

Задача 2. В данный угол A вписать окружность, проходящую через данную внутри его точку B.

Р е ш е н и е. Снимем временно требование, чтобы окружность проходила через точку B. Тогда условию задачи удовлетворяет бесчисленное множество окружностей, центры которых находятся на биссектрисе угла A, а радиусами являются отрезки — перпендикуляры, опущенные из центра на стороны угла. Построим одну из таких окружностей с центром в точке O_1, и радиусом O_1P (рис. 109). Проведем луч AB, отметим точки K и P его пересечения с окружностью и проведем радиус PO_1. Далее проводим отрезок BO_2, параллельный PO_1, до пересечения с биссектрисой угла. Тогда точка O_2 является центром искомой окружности.

Действительно, опустив на сторону угла перпендикуляр O_2H_2, имеем пары подобных треугольников PAO_1 и BAO_2, H_1AO_1 и H_2AO_2, из которых $\frac{BO_2}{PO_1} = \frac{O_2A}{O_1A}$, $\frac{H_2O_2}{H_1O_1} = \frac{O_2A}{O_1A}$. Поскольку $PO_1 = H_1O_1$, то

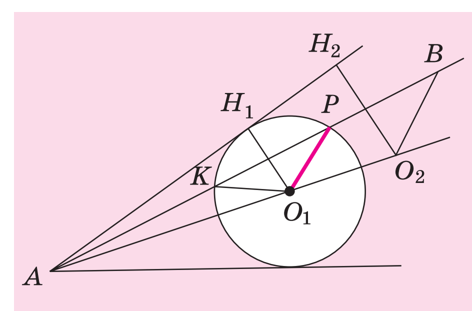


Рис. 109

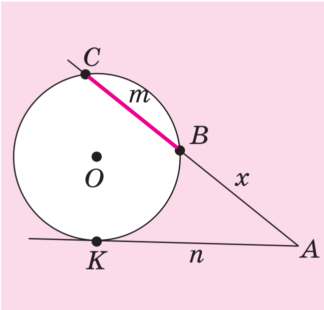


Рис. 110

$H_2O_2 = BO_2$, поэтому окружность с центром O_2, радиус которой O_2B, касается сторон угла.

Если провести отрезок BO_3, параллельный отрезку KO_1, конец O_3 которого лежит на биссектрисе данного угла, то получим второй центр искомой окружности. Таким образом, задача имеет два решения.

Задача 3*. Через точку A, взятую вне окружности (рис. 110), провести секущую AC так, чтобы хорда BC имела данную длину m.

Допустим, что такая секущая построена и $BC = m$. Проведем к окружности касательную AK и обозначим ее длину через n (заметим при этом, что величина n — постоянная и ее можно считать данной в задаче). Тогда по известному свойству касательной имеем: $n^2 = x(x + m)$, откуда $x = \frac{-m+\sqrt{m^2+4n^2}}{2}$. Отрезок x постройте самостоятельно.

?

1. Сформулируйте и докажите теорему о ГМТ — биссектрисе угла.
2. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
3. Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?
4. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
6. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника.
7. Какая окружность называется вписанной в многоугольник?
8. Какой многоугольник называется описанным около окружности?
9. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
10. Какая окружность называется описанной около треугольника? Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.
11*. Выпуклый четырехугольник называется вписанным в окружность, если каждая из его вершин лежит на окружности. Докажите, что у вписанного четырехугольника сумма противолежащих углов равна 180°.
12*. Выпуклый четырехугольник называется описанным около окружности, если каждая из его сторон касается окружности. Докажите, что у описанного четырехугольника суммы противолежащих сторон одинаковы.

Задания

Устные упражнения **211—214**.

211. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; б) $AC = 18$ см, $\angle B = 30°$.

212. Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

213. Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

214. Докажите геометрически неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},\ a > 0,\ b > 0.$$

215. Постройте прямоугольный треугольник: а) по проекциям его катетов на гипотенузу; б) по гипотенузе и высоте, опущенной на нее.

216. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 35°. Под каким углом видны из центра описанной около него окружности катеты?

217. В четырехугольнике два противоположных угла прямые. Доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность, причем одна из диагоналей четырехугольника является диаметром этой окружности.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ углы B и D — прямые. Тогда $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 111) — около этого четырехугольника можно описать окружность. Далее имеем: $\cup ABC = 2\angle D = 2 \cdot 90° = 180°$, т. е. диагональ AC — диаметр этой окружности.

218. Докажите, что сумма диаметров окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него, равна сумме катетов этого треугольника.

219. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся боковых сторон треугольника в точках M и E. Найдите периметр треугольника ABC, если хорда ME равна 12 см, а отрезок касательной, заключенный между боковыми сторонами, равен 10 см.

220. Докажите, что в треугольнике с углом 30° против этого угла лежит сторона, равная радиусу описанной окружности.

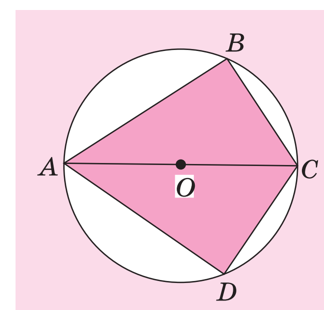


Рис. 111

221. Углы треугольника относятся как 3 : 5 : 12. Расположен ли центр описанной около него окружности внутри треугольника?

222. Сторона треугольника равна 5 см, а противолежащий ей угол — 150°. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

223. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см. Точка касания вписанной в него окружности делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найдите радиус окружности.

224. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 1 см, а один из его катетов — 3 см. Найдите второй катет и гипотенузу.

225. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 30 см, а радиус вписанной в него окружности равен 12 см. Найдите катеты и площадь треугольника.

226. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если известно, что радиус описанной около него окружности равен R.

227. В треугольнике EHK $\angle H = 60°$. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите длину стороны EK.

228. В данную окружность впишите равносторонний треугольник.

229. Постройте квадрат: а) вписанный в данную окружность; б) описанный около данной окружности.

230. Постройте прямоугольник по радиусу описанной около него окружности и углу между диагоналями.

231. Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, углы которого, взятые последовательно, относятся как числа: а) 2, 2, 3, 3; б) 2, 5, 3, 4; в) 3, 5, 3, 1?

232. Найдите углы вписанного в окружность четырехугольника, если два его противолежащих угла относятся как 3 : 5, а два других как 4 : 5.

233. В описанном около окружности четырехугольнике сумма двух противоположных сторон равна 4,5 см, а две другие стороны относятся как 2 : 3. Найдите периметр четырехугольника.

234. В равнобочную трапецию вписана окружность. Докажите, что: а) радиус окружности равен среднему пропорциональному между отрезками, на которые боковая сторона делится точками касания; б) диаметр окружности равен среднему пропорциональному между основаниями трапеции.

235. а) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = 19$ см, $BC = 7$ см, $CD = 15$ см и $AD = 21$ см. Стороны AB и CD продолжены до пересечения в точке M. Найдите длины отрезков MB и MC.

б) Верно ли, что отношение площади круга к площади вписанного в него квадрата больше 1,5?

236. Около окружности радиусом 5 см описан прямоугольный треугольник, в котором высота, проведенная из вершины прямого угла, равна 12 см. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника.

237. В треугольник ABC вписана окружность, радиус которой равен 4 см. Найдите стороны AB и AC, если $BC = 15$ см, а высота треугольника $BH = 12$ см.

238. В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 15 см, средняя линия равна 16 см, а большее основание является диаметром окружности. Найдите площадь трапеции.

239. AC и BD — диагонали ромба $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ AC в точке E. Найдите диагонали ромба, если $AB = 20$ см, $CE = 7$ см.

240. Постройте ромб по радиусу вписанной в него окружности и стороне.

241. Докажите, что касательные к окружности, проведенные в вершинах прямоугольника, вписанного в нее, образуют ромб. В каком случае этот ромб является квадратом?

242. Найдите радиус окружности, описанной около равнобочной трапеции, основания которой равны 21 см и 9 см, а высота 8 см.

243. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобочную трапецию, большее основание которой равно 3 см, а острый угол 60°.

244. Около окружности описана трапеция, средняя линия которой равна 5 см, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь трапеции.

245. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 см, а его основание 6 см. Найдите расстояние от точки пересечения высот треугольника до центра окружности, вписанной в него.

246. В прямоугольном треугольнике ABC проведена из вершины прямого угла высота CH. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники CHB и AHC, если $BC = 4$, $AC = 3$.

247*. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен R, а один из его острых углов равен α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

248*. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, равна a, а радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

249*. В треугольнике ABC $AB = 2\sqrt{2}$, $\angle C = 45°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

250*. а) Периметр треугольника равен 20 см. Может ли радиус окружности, описанной около него, быть равным 3 см?

б) Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 5 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным 30 см?

251*. а) Периметр треугольника равен 30 см. Может ли радиус окружности, вписанной в этот треугольник, быть равным 5 см?

б) Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 8,4 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным 50 см?

252*. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки m и n. Найдите площадь треугольника.

253*. Впишите в данную окружность треугольник, подобный данному.

254*. В данную окружность впишите прямоугольник, подобный данному.

255*. На диаметре AC данной окружности взята точка M, которая делит радиус окружности пополам. Проведите через эту точку хорду BD окружности так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей.

256*. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S. Найдите длину средней линии трапеции, если угол при ее большем основании равен α.

257*. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

258*. а) В окружность радиусом R вписана трапеция с основаниями a и b. Вычислите площадь трапеции.

б) Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой при продолжении пересекаются под углом α. Основания трапеции равны a и b. Найдите радиус окружности.

259*. В прямоугольном треугольнике радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно равны R и r. Найдите катеты этого треугольника.

260*. Доказать, что в прямоугольном треугольнике выполняется неравенство: $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ (рис. 112).

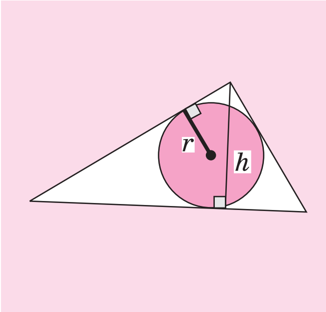


Рис. 112

261*. Из четырехугольников, вписанных в окружность радиуса R, найдите четырехугольник с наибольшей площадью.

262*. Высота BH треугольника ABC равна 12 см. В треугольник ABH вписана окружность, радиус которой равен 2 см, а в треугольник BHC — окружность, радиус которой равен 3 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Повторение главы II

Исторические сведения

В VII в. до н. э. древние греки охотно отправлялись в дальние морские путешествия. Им открывался свободный доступ в Египет, «страну пирамид», где были развиты математика, астрономия, медицина. Примерно с IV в. до н. э. ученые Древней Греции стали на путь самостоятельных изысканий по математике и добились в этом направлении значительных успехов, особенно в геометрии. В III в. до н. э. древнегреческая геометрия достигла своего апогея в работах Евклида, написавшего тринадцать книг по математике, объединенных общим названием «Начала». (Учение о круге и окружности, о секущих и касательных и об углах, образуемых ими, изложено в третьей книге; учение о вписанных и описанных многоугольниках — в четвертой.)

Евклид
(III в. до н. э.)

В трудах древнегреческих ученых Евклида, Архимеда, Аполлония логическая сторона геометрии была доведена до очень высокого уровня.

Вот одна из задач Аполлония Пергского: «Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей».

Решение задачи, выполненное Аполлонием, до нас не дошло, однако оно упоминается некоторыми древними авторами более позднего времени. По-видимому, Аполлоний, чтобы решить задачу в общем виде, рассматривал ее отдельные частные случаи.

Исследование показывает, что если задача Аполлония имеет конечное число решений, то их не более 8.

Контрольные вопросы

1. Что называется: а) окружностью; б) хордой окружности; в) диаметром окружности; г) дугой окружности; д) касательной к окружности?

2. Какой угол называется вписанным в окружность и чему равна его величина?

3. Сформулируйте признак касательной.

4. Какой многоугольник называется вписанным в окружность; описанным около окружности?

5. Какая окружность называется вписанной в многоугольник; описанной около многоугольника?

6. Где находится центр окружности, описанной около треугольника; вписанной в треугольник?

7. При каких условиях можно вписать четырехугольник в окружность; описать четырехугольник около окружности?

8. Каким свойством обладает вписанный в окружность четырехугольник; описанный около окружности четырехугольник?

9. Какие свойства касательной к окружности вы знаете?

10. Какие свойства пересекающихся хорд окружности вы знаете?

11. По какой формуле можно вычислить площадь треугольника, вписанного в окружность?

12. По какой формуле можно вычислить площадь треугольника, описанного около окружности?

Задания

263. Найдите радиус окружности:

а) вписанной в равносторонний треугольник со стороной a;

б) описанной около равностороннего треугольника со стороной a.

264. Постройте треугольник по данным его:

а) двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне;

б) по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам;

в) по стороне, противолежащему ей углу и высоте, опущенной на нее.

265. Постройте хорду окружности, которая равна хорде с одним недоступным концом.

266. а) AC — касательная, AB — хорда окружности с центром O. Чему равен угол BAC, если угол AOB равен 70°?

б) AC — касательная, AB — хорда окружности с центром O. Чему равен угол AOB, если угол BAC равен 75°?

267. а) BD — касательная к окружности с центром O, BA — хорда окружности. Найдите угол DBA, если треугольник AOB равносторонний.

б) AB — диаметр окружности с центром O, BC — хорда окружности. Известно, что $\angle AOC = 80°$, а BM — касательная к окружности. Найдите угол CBM.

268. а) В окружность, радиус которой равен 10 см, вписан прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 16 см. Найдите площадь треугольника.

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, описанного около окружности, радиус которой равен 3 см, если один из катетов равен 9 см.

269. а) В окружность, радиус которой равен 10 см, вписан прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольный треугольник вписана окружность, радиус которой равен 4 см. Найдите площадь треугольника, если один из катетов равен 10 см.

270. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 18 см, а боковая сторона AB равна 15 см. Найдите: а) радиус вписанной в треугольник окружности; б) радиус описанной около треугольника окружности.

271. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна 8 см, а само основание — 12 см. Найдите: а) радиус окружности, вписанной в треугольник; б) радиус окружности, описанной около треугольника.

272. На радиусе окружности на расстоянии 15 см от ее центра взята точка. Через центр окружности проведена хорда, делящаяся этой точкой на отрезки 7 см и 25 см. Найдите радиус окружности.

273. Окружность радиуса 2 см касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через эту точку, пересекает другую их общую касательную в точке B. Найдите радиус другой окружности, если расстояние AB равно 4 см.

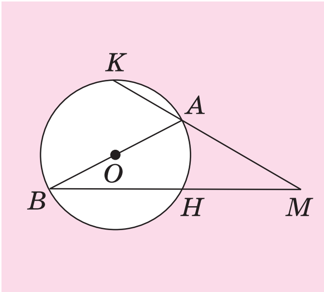


Рис. 113

274. Найдите радиусы окружностей, описанной около треугольника и вписанной в треугольник со сторонами 12 см, 16 см и 20 см.

275*. Из точки, взятой вне окружности, проведены к ней две касательные. Докажите, что расстояние от любой точки окружности до хорды, соединяющей точки касания, есть средняя пропорциональная величина между расстояниями от этой точки до касательных.

276*. Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Докажите, что точка A лежит на окружности диаметра AB.

277*. На рисунке 113 AB — диаметр окружности, равный 8, $AK =$ $= 4$, $MK = 12$. Найдите MB и MH.

278*. Докажите, что сумма квадратов длин двух взаимно перпендикулярных пересекающихся хорд окружности больше квадрата ее диаметра.

279*. Даны две окружности радиусов R и r. Расстояние между их центрами равно d, причем $d > R + r$. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния между двумя точками этих окружностей.

280*. Найдите длину средней линии трапеции, описанной около окружности с радиусом 4 см.

281*. Найдите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности, если радиус описанной около него окружности равен R, а площадь треугольника равна S.

282*. Продолжения высот, опущенных из вершин B и C треугольника ABC, пересекают описанную окружность в точках B_1 и C_1. Определите угол A треугольника ABC, если прямая B_1C_1 проходит через центр описанной окружности.

283*. В окружность O вписан треугольник ABC, а в него вписана окружность O_1. Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC продолжены до пересечения с окружностью O в точках A_1, C_1 и B_1. Докажите, что точка O_1 является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$.

284*. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C, не лежащая ни на окружности, ни на диаметре. При помощи одной линейки опустить из точки C перпендикуляр на диаметр или на его продолжение.

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. AB — диаметр окружности с центром в точке O, OC — ее радиус (рис. 114). Найдите угол ABC, если угол AOC равен 70°.

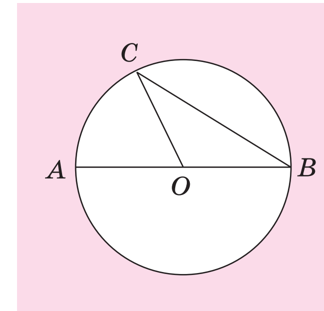


Рис. 114

2. Найдите длину отрезка, соединяющего середину хорды, равной 24 см, с центром окружности радиусом 13 см.

3. Равносторонний треугольник со стороной 12 см вписан в окружность. Найдите сторону квадрата вписанного в эту же окружность.

4. Через концы хорды длиной 30 см проведены две касательные до пересечения в точке A. Найдите расстояние от этой точки до хорды, если радиус окружности равен 17 см.

5. Около окружности описан четырехугольник, две смежные стороны которого равны 2 дм и 3 дм и образуют угол в 60°. Найдите две другие стороны четырехугольника, если они образуют угол в 120°.

Вариант 2*

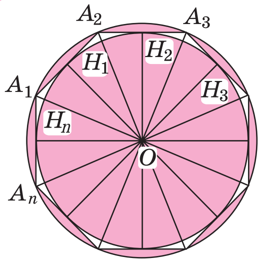
1. Вершины треугольника ABC делят окружность с центром O на три дуги: $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile AC$, градусные меры которых относятся как $2 : 9 : 7$. Найдите углы AOC, BOC и ACB.

2. Постройте равносторонний треугольник по радиусу вписанной в него окружности.

3. AB и AC — хорды окружности с радиусом, равным $5\sqrt{3}$. Угол между ними 60°. Найдите отрезок BC.

4. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиусом $\sqrt{3}$ см. Найдите периметр трапеции, острый угол которой равен 60°.

5. Найдите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности, если даны радиус R описанной около этого треугольника окружности и его площадь S.



Глава III

Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга

§ 6. Правильные многоугольники и их свойства

Определение. **Выпуклый многоугольник называется правильным, если равны все его стороны и равны все его углы** (рис. 115, *а*).

Некоторые правильные многоугольники и их свойства мы изучали (например, квадрат и равносторонний треугольник).

Построение правильных многоугольников удобно выполнять с применением окружности. Разделив окружность на равные дуги и соединив последовательно хордами точки деления, получим правильный многоугольник (рис. 115, *б*).

Многоугольник, построенный таким способом, действительно правильный, так как, во-первых, все его стороны равны как хорды, стягивающие равные дуги, во-вторых, все его углы равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

Если окружность разделить на равные дуги и через точки деления провести к ней касательные, то эти касательные также образуют правильный многоугольник (рис. 116).

Построенный таким образом многоугольник действительно пра-

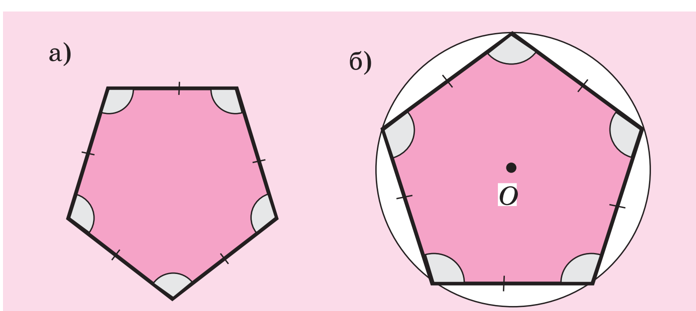


Рис. 115

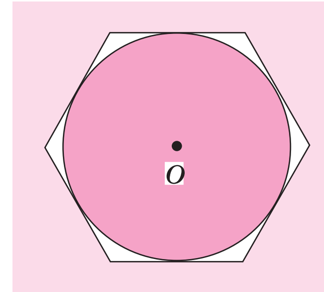


Рис. 116

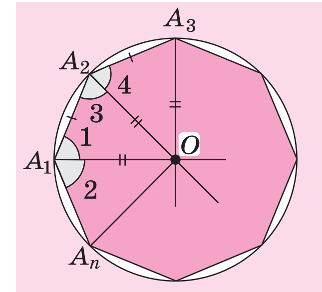


Рис. 117

вильный, поскольку все его стороны равны как основания равных равнобедренных треугольников и все его углы равны (обоснуйте сами).

Рассмотрим теперь некоторые свойства правильных многоугольников.

Теорема 1. **Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.**

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник (рис. 117).

Соединим точку O — пересечение биссектрис углов A_1 и A_2 — отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Имеем: если $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, треугольник A_1A_2O равнобедренный, и, следовательно, $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_3A_2O равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $OA_3 = OA_1$. Аналогично можно доказать, что $OA_4 = OA_2$ и т. д.

Итак, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2...A_n$ можно описать только одну окружность.

Теорема 2. **В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**

Доказательство. Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 118).

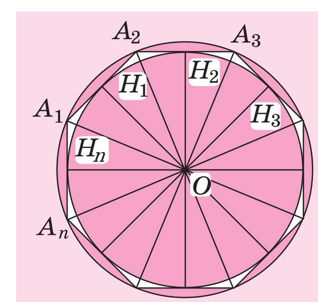


Рис. 118

$\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = ... = \triangle OA_nA_1$ (обоснуйте самостоятельно), поэтому высоты этих треугольников, проведенные из вершины O, также равны: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписанная в этот правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда ее центр O_1 равноудален от сторон многоугольника, поэтому точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения указанных биссектрис. Радиус этой окружности равен OH_1 — расстоянию от точки O до сторон многоугольника. Отсюда заключаем, что эти окружности совпадают. Следовательно, вписанная в правильный многоугольник окружность — единственная.

Теорема 3. **Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.** (Докажите самостоятельно.)

Теорема 4. **Правильные n-угольники подобны, а их стороны (и периметры) относятся как радиусы описанных около них окружностей или как радиусы вписанных в них окружностей.** (Эту теорему докажите самостоятельно.)

Теорема 5. **Прямая, на которой лежит диаметр описанной около правильного многоугольника окружности, проведенная через любую его вершину, является осью симметрии этого многоугольника.**

Эту теорему также докажите самостоятельно и выясните, сколько осей симметрии имеет правильный многоугольник.

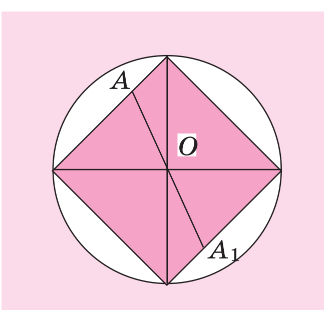


Рис. 119

Теорема 6. **Всякий правильный многоугольник с четным числом сторон имеет центр симметрии, совпадающий с центром окружности, описанной около него.**

Действительно, всякий отрезок AA_1 (рис. 119), проходящий через центр O правильного многоугольника и имеющий концы на его сторонах, делится этим центром пополам. При повороте многоугольника на 180° около центра

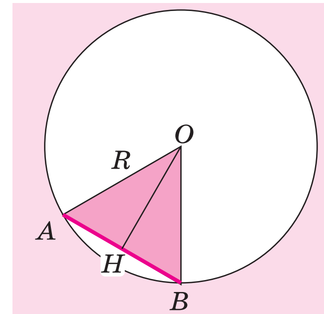


Рис. 120

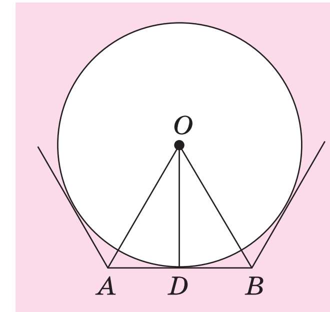


Рис. 121

он отображается на себя, поэтому этот центр является центром симметрии правильного многоугольника.

Рассмотрим теперь две задачи о соотношениях между сторонами правильных многоугольников и радиусами окружностей, описанных около них и вписанных в них.

Задача 1. Найти длину стороны правильного многоугольника, если радиус окружности, описанной около него, равен R.

Решение. Пусть $OA = OB = R$ (рис. 120). Проведем высоту OH равнобедренного треугольника AOB. Тогда имеем: $AH = BH$. $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$, где n — число сторон многоугольника. Из прямоугольного треугольника AOH находим AH: $AH = AO\ \sin\angle AOH = R\ \sin\frac{180°}{n}$. Тогда $AB = 2R\ \sin\frac{180°}{n}$. Если обозначить сторону правильного многоугольника через a_n, то полученная формула примет вид: $a_n = 2R\ \sin\frac{180°}{n}$.

В частности, $a_6 = R$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_3 = R\sqrt{3}$.

Задача 2. Найти длину стороны правильного многоугольника, если радиус окружности, вписанной в него, равен r.

Решение. Пусть $OD = r$ (рис. 121).

Из прямоугольного треугольника OBD имеем:

$$BD = OD \cdot \operatorname{tg}\angle BOD = r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}.$$

Тогда $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

В частности, $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$; $a_4 = 2r$; $a_3 = 2\sqrt{3}\,r$.

Заметим, что аналогично можно решить обратные задачи. (Сделайте это самостоятельно и рассмотрите частные случаи.)

Площадь S правильного многоугольника равна половине произ-

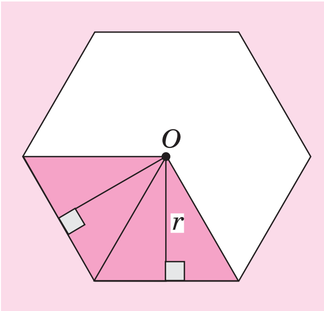


Рис. 122

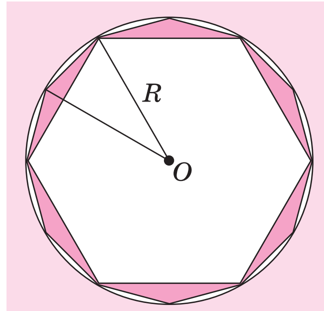


Рис. 123

ведения его периметра P и радиуса r окружности, вписанной в него (рис. 122): $S = \frac{1}{2}Pr$.

Эту формулу можно получить, соединив центр правильного многоугольника с концами всех его сторон и рассмотрев его площадь как сумму площадей соответствующих равнобедренных треугольников.

Площадь S_n правильного многоугольника равна

$$S_n = \frac{1}{2}nR^2 \cdot \sin\frac{360°}{n},$$

где n — число его сторон, R — радиус окружности, описанной около него (рис. 123).

(Эту формулу можно вывести аналогично предыдущей.)

?

1. Какой выпуклый многоугольник называется правильным?
2. Чему равны внутренние и внешние углы правильного многоугольника?
3. Докажите, что правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.
4. Выразите радиус вписанной и описанной окружности для правильного n-угольника через его сторону при $n = 3, 4, 6$.
5. Найдите сторону правильного вписанного $2n$-угольника, если сторона правильного вписанного n-угольника равна a.

Задания

Устные упражнения **285—287**.

285. Приведите примеры четырехугольников со всеми равными сторонами, которые: а) являются правильными; б) не являются правильными. Ответ обоснуйте.

286. Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.

287. Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) треугольник является правильным, если все его углы равны?

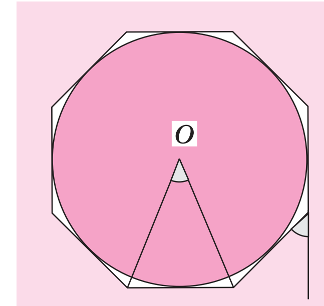


Рис. 124

288. Выведите формулу для вычисления угла правильного многоугольника в зависимости от числа его сторон.

289. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если один из его углов равен: а) 140°; б) 144°; в) 150°; г) 160°?

290. Постройте с помощью циркуля и линейки: а) правильный шестиугольник; б) правильный восьмиугольник; в*) правильный пятиугольник.

291. Докажите, что центральный угол правильного многоугольника (рис. 124) равен его внешнему углу.

292. Докажите, что периметры правильных десятиугольников относятся как радиусы вписанных в них окружностей.

293. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.

294. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 12 см. Найдите площадь описанного около этой окружности квадрата.

295. Сторона вписанного в окружность квадрата равна $8\sqrt{2}$ см. Найдите площадь описанного около этой окружности правильного треугольника.

296. Найдите углы правильного семиугольника.

297. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и BE пересекаются в точке O. Длина отрезка BO равна 2 дм. Найдите длину стороны пятиугольника.

298. Найдите внешние углы правильного десятиугольника.

299. Сколько сторон у правильного многоугольника, если сумма всех его внутренних углов равна 1620°?

300. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEKHF$. Докажите, что четырехугольник $ACEH$ — квадрат.

301. Внутри правильного шестиугольника со стороной $2\sqrt{3}$ см взята произвольная точка M. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, на которых лежат стороны этого шестиугольника.

302. Существует ли правильный многоугольник, внутренний угол которого равен 145°?

303. Можно ли построить пятиугольник, углы которого равны 110°, 109°, 108°, 116°, 100°?

304. $ABCDEH$ — правильный шестиугольник со стороной a. Найдите стороны треугольника ABK, где K — середина стороны DE.

305. Найдите диагонали правильного восьмиугольника, сторона которого равна 8 см.

306. Постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному его меньшей диагонали.

307. Найдите катеты прямоугольных треугольников, которые нужно отрезать от квадрата со стороной a, чтобы получился правильный восьмиугольник.

308. Выразите радиус R окружности, описанной около правильного четырехугольника, через его сторону a.

309. Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в него, равен $\sqrt{3}$.

310. Длина стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 7 см. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

311. Сторона правильного треугольника, описанного около некоторой окружности, равна $\sqrt{3}$. Найдите сторону правильного четырехугольника, вписанного в эту окружность.

312. Радиус окружности равен 10. Найдите длину медианы вписанного в нее правильного треугольника.

313. Во сколько раз сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, меньше стороны квадрата, описанного около этой окружности?

314. Около правильного многоугольника со стороной a описана окружность, а в многоугольник вписана окружность. Докажите, что разность квадратов диаметров этих окружностей равна квадрату стороны данного многоугольника.

315. Длина стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 8 см. Найдите периметр квадрата, вписанного в эту окружность.

316. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\sqrt{3}$. Через центр окружности проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найдите отрезок этой прямой, концы которой принадлежат двум другим сторонам треугольника.

317. Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

318. Сторона описанного около окружности треугольника на $\sqrt{6}$ больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в нее. Найдите сторону треугольника.

319. Найдите площадь правильного: а) треугольника со стороной 5 см; б) восьмиугольника со стороной 4 см.

320. Найдите площадь правильного: а) девятиугольника со стороной 4 см; б) десятиугольника со стороной 8 см.

321. Постройте правильный двенадцатиугольник.

322. В окружность вписаны квадрат и правильный шестиугольник. Периметр квадрата равен 42 мм. Найдите периметр шестиугольника.

323. В окружность вписаны квадрат и равносторонний треугольник. Периметр треугольника равен 3 см. Найдите площадь квадрата.

324*. Около правильного шестиугольника со стороной 1 см описана окружность. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до всех вершин шестиугольника.

325. Можно ли покрыть площадку плитками формы правильного шестиугольника?

326*. Какими равными правильными многоугольниками могут быть плитки, чтобы ими можно было замостить площадку?

327*. Какую площадь имеет клумба формы правильного пятиугольника, если расстояние от вершины пятиугольника до середины противоположной стороны равно d?

328*. Из точки, находящейся на расстоянии b от центра данной окружности, проведены к ней две касательные, угол между которыми равен φ. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

329*. Выразите площадь правильного восьмиугольника через длины его большей и меньшей диагоналей.

330*. В окружность радиуса R вписаны правильный четырехугольник и треугольник, одна из вершин которых общая. Найдите площадь общей части этих четырехугольника и треугольника.

331*. Постройте правильный пятиугольник со стороной a и найдите его площадь.

§ 7. Длина окружности. Площадь круга

1. Длина окружности и ее дуги

Окружность как линия имеет длину. В некоторых случаях длину окружности можно найти непосредственным измерением. Например, чтобы узнать, чему равна длина окружности круглой монеты, можно обвести ее ниткой, выпрямить ниточную окружность и измерить полученный отрезок. Понятно, что таким образом найти длину окружности не всегда возможно. Обычно длину окружности находят по ее радиусу (или диаметру).

Выведем формулу, выражающую длину окружности через ее радиус.

Пусть C_1 и C_2 — длины окружностей радиусов R_1 и R_2. Впишем в каждую из этих окружностей правильный многоугольник с большим числом n его сторон. Обозначим через P_1 и P_2 периметры многоугольников, а через a_1 и a_2 — их стороны (рис. 125). Тогда $P_1 = na_1 = n \cdot 2R_1 \sin\frac{180°}{n}$, $P_2 = na_2 = n \cdot 2R_2 \sin\frac{180°}{n}$, поэтому $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$ при любом значении n.

Если число n сторон многоугольника неограниченно увеличивать, то их периметры P_1 и P_2 будут почти такими же, как и длины окружностей C_1 и C_2, поэтому можно считать, что $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$.

Таким образом, отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от длины окружности, т. е. одно и то же для произвольной окружности. Это отношение условились обозначать числом π (число π — иррациональное). Применив правильные 96-угольники, описанные и вписанные в окружность, выдающийся физик и математик Архимед еще во II в. до н. э. установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

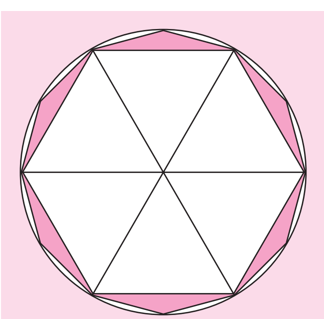


Рис. 125

При решении задач обычно пользуются приближенным значением числа π с точностью до 0,01, т. е. $\pi \approx 3{,}14$.

Таким образом, $\frac{C}{2R} = \pi$, длина окружности C радиуса R равна: $C = 2\pi R$.

Длина l дуги окружности, соответствующей центральному углу $n°$

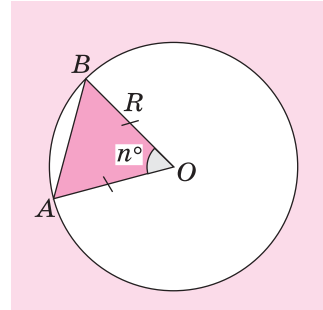


Рис. 126

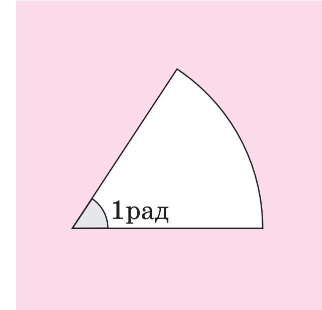


Рис. 127

(рис. 126), находится по формуле $l = \frac{\pi R n}{180}$, поскольку длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360}$.

Отметим, что вам известны разные единицы измерения угловых величин: градус, минута, секунда, связанные между собой следующими соотношениями: $1° = 60'$; $1' = 60''$; $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$; $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$.

Кроме этих величин, применяется также единица измерения углов, называемая радианом.

Углом в один ***радиан*** называют центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности (рис. 127).

Радианная мера угла не зависит от длины радиуса окружности, так как фигуры, ограниченные углом и дугой окружности с центром в вершине этого угла, подобны (рис. 128). Радианная мера угла выражается отношением длины соответствующей ему дуги к радиусу окружности: из формулы длины окружности следует, что $\frac{l}{R} = \frac{\pi n}{180}$; поэтому радианная мера угла получается умножением на $\frac{\pi}{180}$. Радианная мера угла 180° равна π рад (слово «радиан» сокращенно обозначают «рад»). Радианная мера угла в 1° равна

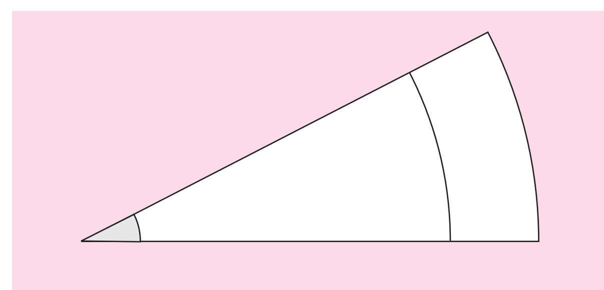


Рис. 128

$1° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{180}$ рад; приближенно 1° равен 0,01745 рад. Градусная мера угла в 1 рад равна $\frac{180°}{\pi}$; 1 рад $= \frac{180°}{\pi}$; приближенно 1 рад равен 57°18′.

Если, например, надо выразить в градусах 0,3 рад, то имеем: 0,3 рад $= \frac{180° \cdot 0{,}3}{\pi} \approx \frac{54°}{3{,}14} \approx 17°$.

В случае, если надо выразить в радианах угол в 72°, то, поскольку $1° = \frac{\pi}{180}$ рад, имеем: $72° = 72 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{2\pi}{5}$ рад $\approx 1{,}3$ рад.

При записи радианной меры угла обозначение «рад» обычно опускают. Например, вместо $72° = \frac{2\pi}{5}$ рад пишут $72° = \frac{2\pi}{5}$.

Таблица радианной и градусной мер некоторых углов приведена ниже:

$n°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

2. Площадь круга, сектора, сегмента

Впишем правильный многоугольник в окружность, ограничивающую круг (рис. 129). Если неограниченно увеличивать число сторон этого многоугольника, то его периметр P будет очень мало отличаться от длины $C = 2\pi R$ окружности, а высота h треугольника AOB совсем мало отличаться от радиуса окружности R. Площадь S' правильного многоугольника равна $S' = \frac{Ph}{2}$, поэтому можно заключить, что площадь круга $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

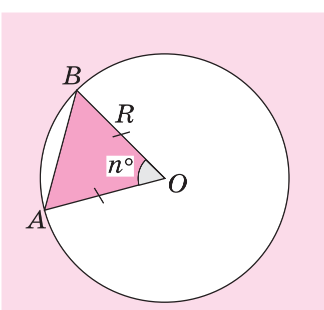


Рис. 129

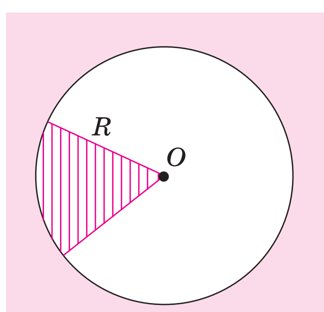


Рис. 130

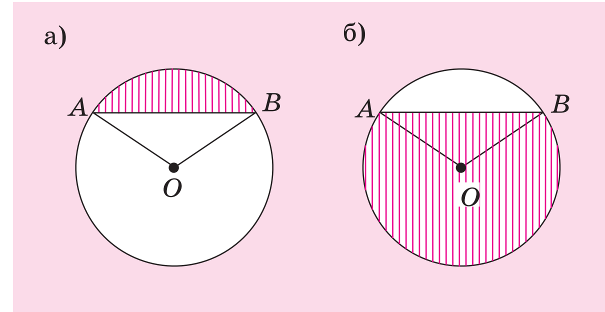


Рис. 131

Рассмотрим еще, как находятся площади некоторых частей круга. Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, называется ***сектором***.

Площадь сектора, угол между радиусами которого равен $n°$ (рис. 130), вычисляется по формуле $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$ $\left(\text{так как площадь сектора с углом в } 1° \text{ между радиусами равна } \frac{\pi R^2}{360}\right)$.

Часть круга, ограниченная хордой и дугой окружности, называется ***сегментом***.

*Площадь сегмента вычисляется по формулам (рис. 131, *а, б*): $S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 n}{360} - S_{\triangle AOB}$ при $n < 180°$; $S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 n}{360} + S_{\triangle AOB}$ при $n > 180°$.*

Задача 1. Дано: окружность длины l. Найти: площадь круга S.

Р е ш е н и е. $S = \frac{l \cdot R}{2}$; $l = 2\pi R$ (рис. 132).

Получаем: $R = \frac{l}{2\pi}$,

$S = \frac{l \cdot R}{2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2\pi} = \frac{l^2}{4\pi}$.

О т в е т: $\frac{l^2}{4\pi}$.

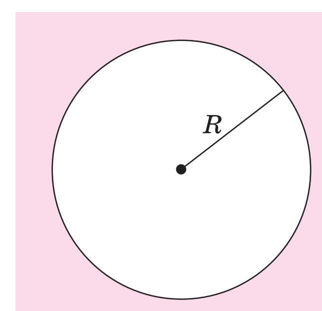


Рис. 132

Задача 2. Дано: правильный треугольник ABC, круг радиусом R площадью S_R, описанный около треугольника ABC, круг радиусом r площадью S_r, вписанный в треугольник ABC. Найти: $\frac{S_R}{S_r}$.

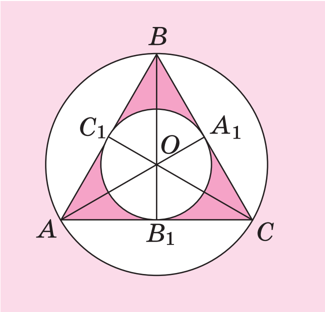


Рис. 133

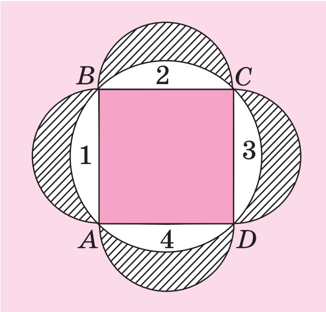


Рис. 134

Р е ш е н и е.

Согласно формулам для радиусов вписанных и описанных окружностей вокруг правильного треугольника: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, где a — сторона треугольника ABC. $S_R = \pi R^2$, $S_r = \pi r^2$ (рис. 133).

Получаем: $\frac{S_R}{S_r} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot \frac{12}{\pi a^2} = 4$.

О т в е т: 4.

Задача 3*. Четыре луночки образованы окружностью, описанной вокруг квадрата, и полуокружностями, построенными на сторонах квадрата как на диаметрах (рис. 134).

Доказать, что их общая площадь равна площади квадрата (эти луночки называют луночками Гиппократа[1]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S_{AB} обозначает площадь полукруга, построенного на отрезке AB как на диаметре. Дополним площадь заштрихованных луночек площадями сегментов 1, 2, 3, 4 большого круга.

Тогда имеем: $S_{AB} + S_{BC} = S_{AC}$,

$S_{CD} + S_{DA} = S_{AC}$.

Но $S_{AC} + S_{AC} = S_{\text{кр.}}$, где $S_{\text{кр.}}$ — площадь круга с диаметром AC.

Тогда $S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA} = S_{\text{кр.}}$.

Пусть S — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 134, и $S_{\text{сегм.}}$ — площадь каждого из четырех сегментов 1, 2, 3, 4.

Тогда $S = S_{AB} - S_{\text{сегм.}} + S_{BC} - S_{\text{сегм.}} + S_{CD} - S_{\text{сегм.}} + S_{DA} - S_{\text{сегм.}} = S_{\text{кр.}} - 4S_{\text{сегм.}} = S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

[1] Гиппократ Хиосский (2-я половина V в. до н. э.) — древнегреческий геометр, автор первого систематического труда по геометрии.

?

1. Что такое длина окружности? Выведите формулу для длины окружности $C = 2\pi R$.
2. По какой формуле определяется длина дуги окружности?
3. Что такое радианная мера угла?
4. Сформулируйте свойства площади.
5. Выведите формулу для площади круга $S = \pi R^2$.
6. По каким формулам вычисляются площади кругового сектора и кругового сегмента?

Задания

У с т н ы е у п р а ж н е н и я **332—334**.

332. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза; в) увеличить в k раз; г) уменьшить в k раз?

333. Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

334. Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

335. Докажите, что площадь описанного выпуклого многоугольника равна произведению полупериметра на радиус круга. Как относятся площади подобных фигур?

336. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, длина которой равна 216 см.

337. Найдите длину окружности, ограничивающей круг, площадь которого равна 216 см^2.

338. Радиус окружности увеличили на 5 см. Как изменилась длина окружности?

339. Радиус окружности, равный 4 дм, увеличили на 5 дм. На сколько процентов увеличилась длина окружности?

340. Окружность длиннее своего диаметра на 10,5 см. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

341. У окружности с разных боков от центра проведены две параллельные хорды длиной 6 и 8, расстояние между которыми равно 7. Найдите длину окружности и площадь ограниченного ею круга.

342. Даны две концентрические окружности. Некоторая хорда окружности большего радиуса касается другой окружности и имеет длину 6 см. Найдите площадь кольца, образованного этими окружностями.

343*. Даны две концентрические окружности радиусами R и r ($R > r$). Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на одной окружности, а две другие — на другой.

344. Длина дуги в 30° некоторой окружности равна 3 м. Найдите площадь сектора, радиус которого равен радиусу этой окружности, а угол между радиусами сектора равен 50°.

345. Угол между касательной к окружности и ее хордой, проведенной в точку касания, равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите площадь круга, если длина этой хорды равна 6 см.

346. Окружность разделена двумя точками на две дуги, длины которых относятся как 5 : 7. Найдите отношение площадей:

а) секторов, которые получатся, если провести к этим точкам радиусы окружностей;

б) сегментов, если соединить эти точки хордой окружности.

347. На рисунке 135 дан правильный треугольник ABC со стороной a. Найдите площадь фигуры KMH, где KH, KM и MH — дуги окружностей радиуса $\frac{a}{2}$.

348. Докажите, что площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна $\frac{3}{4}$ площади правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

349. $ABCDEF$ (рис. 136) — правильный шестиугольник со стороной a и центром O. EOC и FOB — дуги окружностей. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

350. В окружность вписан прямоугольник, диагональ которого равна d, а угол между диагоналями равен α. Найдите отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади прямоугольника.

351. Две трубы диаметрами 6 дм и 8 дм требуется заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Определите диаметр такой трубы.

352. Найдите площадь сектора, если радиус окружности равен 7, а хорда, стягивающая дугу сектора, равна 8,5.

353. Вычислите площадь круга, описанного около треугольника, одна сторона которого равна 5 см, а прилежащие к ней углы 37° и 79°.

354. Найдите площадь общей части двух пересекающихся кругов, если их радиусы 6 дм и 5 дм, а длина их общей хорды 6 дм.

355. Как надо разрезать данный правильный треугольник на четыре треугольника, из которых можно составить параллелограмм?

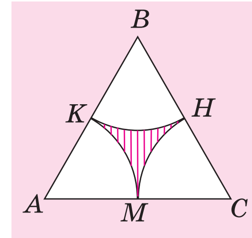


Рис. 135

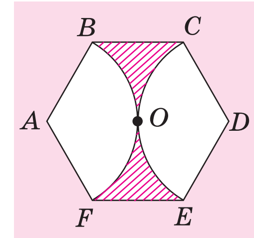


Рис. 136

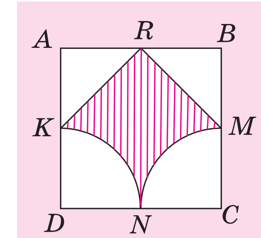


Рис. 137

356. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 137), где сторона квадрата равна c, DKN и CMN — равные секторы.

357. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой в два раза больше длины окружности. Найдите углы трапеции.

358. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Найдите, какую: а) наибольшую длину стороны; б) наибольшую площадь может иметь этот квадрат.

359. В окружность радиусом 4 см вписан правильный шестиугольник. Найдите проекции его сторон на каждую диагональ.

360. Один из двух квадратов со стороной 5 см, наложенных один на один, повернули около их общего центра на 45° против часовой стрелки. Найдите периметр образованной при этом фигуры.

361. Постройте квадрат, высоты которого лежат на сторонах ромба, а стороны параллельны сторонам ромба.

362. Окружность длиной 6 см развернули в дугу окружности радиусом 5 см. Найдите градусную меру этой дуги.

363. Дуга окружности радиусом 4 см, градусная мера которой равна 120°, равна длине некоторой окружности. Найдите длину этой окружности.

364. Найдите радиус окружности, если ее длина больше диаметра окружности на 107 см.

365. Две параллельные хорды окружности равны 14 см и 40 см, а расстояние между ними 39 см. Найдите длину окружности и площадь ограниченного ею круга.

366. Вычислите длину дуги земного экватора величиной в 1° (радиус земного экватора приближенно равен 6400 км).

367. Из квадратного листа жести 5 дм × 5 дм вырезали круг наибольшей площади. Какая часть листа ушла в отходы?

368. Вычислите наименьший радиус заготовки круглой формы, чтобы из нее можно было получить деталь квадратной формы со стороной 5 см.

369*. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен $2p$, а острый угол равен α. Найдите отношение площади трапеции к площади круга, ограниченного этой окружностью.

370. В окружность радиусом R вписан прямоугольный треугольник. Найдите его катеты, если радиус окружности, вписанный в этот треугольник, равен r.

371. Найдите длину окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b.

372. Около правильного треугольника со стороной a описана окружность, и в него вписана окружность. Найдите площадь полученного при этом кольца.

373. В круг радиусом R вписан равнобедренный треугольник, в котором сумма высоты и боковой стороны равна m. Найдите высоту треугольника.

374. Найдите радиус окружности, длина которой и площадь ограниченного ею круга выражаются одним и тем же числом.

375*. Дан квадрат, сторона которого равна a. Постройте правильный треугольник, одна вершина которого совпадает с одной вершиной квадрата, а две другие вершины лежат на сторонах квадрата, и найдите его площадь.

376*. Около окружности радиусом r описан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2...A_{12}$. Доказать, что $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$.

§ 8*. Фигуры вращения

Цилиндр. Конус. Шар

Напомним, что если вращать прямоугольник около одной из его сторон (рис. 138), то получится геометрическое тело — ***цилиндр***. При этом одна сторона прямоугольника, являющаяся высотой цилиндра, образует боковую поверхность цилиндра, а две другие (противоположные) — основания цилиндра.

Если развернуть боковую поверхность цилиндра, то получится прямоугольник, длина основания которого равна длине окружности основания цилиндра, а высота — высоте цилиндра.

Зная радиус R основания цилиндра и его высоту h, можно вычислить площадь поверхности цилиндра (рис. 139):

$$S_{\text{цил.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = \boldsymbol{2\pi R\,(R + h)}.$$

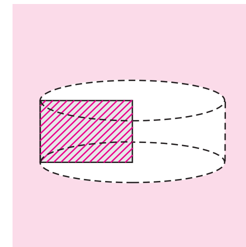


Рис. 138

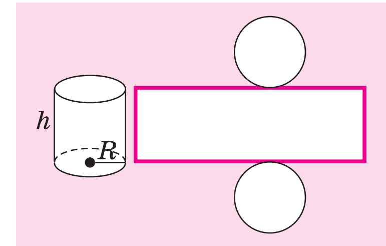


Рис. 139

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$\boldsymbol{V_{\text{цил.}} = Sh = \pi R^2 h.}$$

Если вращать прямоугольный треугольник около одного из катетов, то получится ***конус*** (рис. 140). При этом другой катет образует круг, который называют основанием конуса, а гипотенуза — боковую поверхность конуса; напомним, что эту гипотенузу называют образующей конуса, а его высотой является катет, около которого вращают прямоугольный треугольник.

Развертка конуса состоит из сектора SAB (развертки его боковой поверхности) и круга (рис. 141).

Зная радиус $R = OA$ основания конуса и его образующую $l = SA$, можно найти площадь поверхности конуса:

$$S_{\text{кон.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = \pi R^2 + \pi Rl = \boldsymbol{\pi R\,(R + l)}.$$

Объем конуса выражается формулой $V = \frac{1}{3}Sh$, где V — объем конуса, S — площадь основания конуса, $h = SO$ — его высота; поэтому $\boldsymbol{V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$, где R — радиус основания конуса.

Если вращать полукруг около его диаметра (рис. 142), то получится ***шар*** (при этом отрезок, равный радиусу окружности (OA), называют ***радиусом шара***).

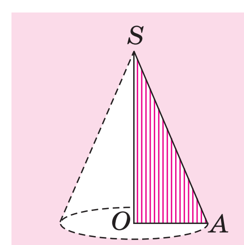


Рис. 140

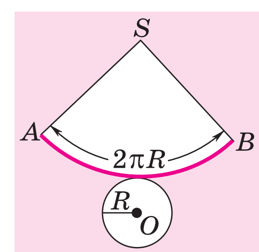


Рис. 141

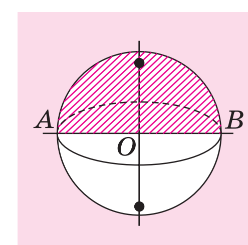


Рис. 142

Площадь поверхности шара (площадь сферы) вычисляется по формуле

$$S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара,

или

$$S_{\text{ш.}} = \pi D^2,$$

где D — диаметр шара.

Объем шара вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(Эту формулу выводят в курсе геометрии старших классов.)

Задания

377. Начертите развертку цилиндра, размеры которого выберите сами.

378. Вычислите площадь поверхности и объем цилиндра по следующим данным: 1) диаметр основания равен 12 см, высота 3,5 см; 2) радиус основания 18 см, высота 2,5 дм.

379. Выразите объем цилиндра через его высоту h и длину C окружности основания.

380. Вычислите объем резервуара, имеющего цилиндрическую форму, если: 1) его высота равна 8 м, а длина окружности основания 30 м; 2) радиус окружности его основания равен 3,5 м, а высота равна диаметру основания.

381. Сравните объем трех цилиндров: два из них получаются вращением прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг каждой из двух смежных сторон, а третий — вращением квадрата, периметр которого равен периметру этого прямоугольника, вокруг стороны.

382. На модели цилиндра проведите необходимые измерения и вычислите: 1) площадь боковой поверхности; 2) площадь поверхности; 3) объем модели.

383. Как изменится площадь боковой поверхности конуса, если: 1) длина его образующей увеличится в три раза; 2) радиус его основания уменьшится в три раза?

384. Постройте развертку конуса, размеры которого выберите сами.

385. Может ли длина образующей конуса равняться: 1) его высоте; 2) радиусу окружности основания?

386. Вычислите площадь поверхности и объем конуса по следующим данным: 1) образующая равна 1,6 дм и радиус основания 4 см; 2) образующая равна 15 см и высота 10 см; 3) высота равна 2,4 дм, а радиус основания 15 см.

387. Прямоугольный треугольник с катетами 40 см и 20 см вращается вокруг большего из катетов. Вычислите объем и площадь поверхности полученного при вращении конуса.

388. Как изменится объем конуса, если: 1) его высота увеличится в n раз, а радиус окружности основания не изменится; 2) радиус окружности основания увеличится в n раз, а высота не изменится?

389. Вычислите объем вырытой в земле конической воронки, образующая которой равна 2 м, а длина окружности 8 м.

390. *Практическая работа*. На моделях правильной пирамиды, цилиндра, конуса произведите необходимые измерения и вычислите площади поверхностей и объемы этих тел.

391. Полукруг, радиус которого равен r, вращается вокруг своего диаметра. 1) Выразите через r площадь поверхности и объем шара, полученного при этом вращении. 2) Вычислите площадь поверхности и объем этого шара, если r равно: а) 4 см; б) 2,5 см; в) 16,8 мм; г) 1 дм.

392. Вычислите площадь поверхности и объем шара, диаметр которого равен q, если: 1) $q = 0{,}5$ м; 2) $q = 8$ м.

393. Диаметр Луны составляет 0,25 диаметра Земли. Вычислите: 1) какую часть площади поверхности Земли составляет площадь поверхности Луны; 2) какую часть объема Земли составляет объем Луны.

394*. На рисунке 143 — ангар с полуцилиндрической крышей. Найдите площадь поверхности всего ангара, если $AB = a$, $BK = b$, $MO = h$, $ON = c$.

395*. Докажите, что с помощью штангенциркуля (рис. 144) по указанным данным диаметр основания детали цилиндрической формы можно вычислить по формуле $D = h + \frac{l^2}{4h}$ (если D нельзя измерить непосредственно).

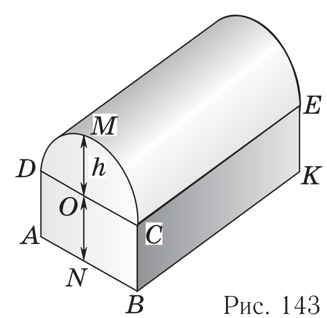


Рис. 143

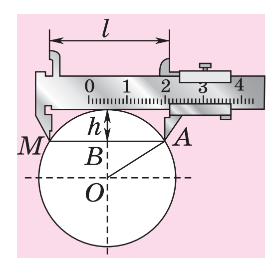


Рис. 144

Повторение главы III

Исторические сведения

Более двух тысячелетий назад было подмечено, что все окружности длиннее своих диаметров в одно и то же число раз. Впоследствии это было доказано.

Отношение длины окружности к ее диаметру лет 350 назад стали обозначать кратко одной буквой π. Эта греческая буква — первая буква греческого слова *периферия* (περιφερια), что означает окружность.

Число π является бесконечной десятичной непериодической дробью. Было найдено много различных рациональных приближений для числа π. Так, например, древнеримский архитектор Витрувий принимал $\pi \approx 3\frac{1}{8}$. Это было удобное приближение для строительной практики тех времен, так как, если измерить длину диаметра окружности, то затем легко получить отрезок, равный по длине окружности.

Архимед нашел, еще за несколько столетий до Витрувия, более точное приближение для числа π. Он доказал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \quad \pi \approx 3\frac{1}{7}.$$

Архимед
(287—212 гг. до н. э.)

Чтобы вычислить приближенно число π, в течение многих столетий поступали так: в окружность с диаметром, равным единице, мысленно вписывали правильный многоугольник с большим числом сторон и вычисляли периметр этого многоугольника.

Периметр такого многоугольника и принимался равным числу π. Для оценки погрешности такого приближения приходилось рассматривать также периметры правильных описанных многоугольников.

Контрольные вопросы

1. Какой многоугольник называется правильным многоугольником? Приведите примеры правильных многоугольников.

2. Какие формулы, выражающие зависимость между сторонами правильных многоугольников и радиусами окружностей, описанных около них или вписанных в них, вы знаете?

3. По какой формуле вычисляется длина окружности?

4. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?

5. Что такое радиан? Объясните на примерах зависимость между градусной и радианной мерами угла.

6. По какой формуле вычисляется площадь круга?

7. Приведите формулу площади сектора и сегмента.

Задания

396. Найдите длину дуги, соответствующей центральному углу 45°, если радиус окружности равен 8 см.

397. Найдите длину дуги, соответствующей центральному углу 60°, если диаметр окружности равен 10 см.

398. По данной длине дуги l найти ее хорду, если дуга составляет 135°.

Решение. На рисунке 145 изображена данная дуга AB с центральным углом AOB, равным 135°, R — радиус окружности, содержащей дугу AB. Тогда $l = \frac{3\pi}{4}R$, $R = \frac{4l}{3\pi}$.

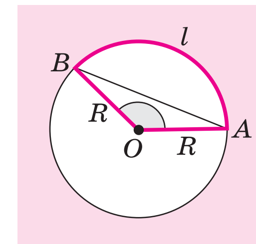


Рис. 145

Из треугольника AOB по теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 135° = 2R^2(1 - \cos 135°) = 2R^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= R^2\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Отсюда $AB = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$ или $AB = \frac{4l}{3\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

399. Чтобы найти толщину дерева (диаметр окружности), можно измерить его обхват (длину окружности). Вычислите толщину дерева, обхват которого равен: а) 1,5 м; б) 2,2 м.

400. Вычислите площадь поперечного сечения дерева, если его обхват (длина окружности) равен: а) 88 см; б) 5 дм.

401. Вычислите длину дуги экватора величиной в 1′ (радиус земного экватора приближенно равен 6400 км).

402. Минутная стрелка Кремлевских курантов имеет длину 3,6 м. Какова длина дуги, которую описывает конец стрелки в течение: а) 15 мин; б) 2 ч?

403. а) Какую наибольшую площадь может иметь круг, вырезанный из квадрата со стороной 1,96 м?

б) Какую наибольшую длину может иметь окружность, вырезанная из квадрата со стороной 27,3 см?

404. Даны круг и квадрат, площади которых равны. Что больше: длина окружности или периметр квадрата?

405. Длина окружности и полупериметр квадрата равны. Сравните площади круга и квадрата.

406. Около правильного многоугольника со стороной c описана окружность, и в многоугольник вписана окружность. Найдите площадь образовавшегося кольца.

407. Правильный многоугольник вращается около своего центра. При каких значениях угла поворота α этот многоугольник совмещается сам с собой?

408. Угловая величина дуги сегмента равна 120°, а длина этой дуги равна p. Найдите длину окружности, вписанной в этот сегмент. (Окружность считается вписанной в сегмент, если она касается его дуги и хорды.)

409. В круге радиуса R проведены две параллельные хорды, каждая из которых стягивает дугу в α радиан. Найдите площадь части круга, которая находится между этими хордами.

410. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра радиусом $\frac{a}{3}$ проведена окружность. Вычислите площадь той части треугольника, которая находится вне этой окружности.

411. В правильный треугольник, сторона которого равна b, вписана окружность. Из вершины треугольника радиусом, равным половине стороны треугольника, проведена вторая окружность. Вычислите площадь, общую для полученных кругов.

412. Докажите, что если центр гомотетии двух окружностей лежит на одной из них, то эти окружности касаются в этом центре.

413. Докажите, что диагонали AD, BE, CF шестиугольника $ABCDEF$, описанного около некоторой окружности, пересекаются в одной точке.

414. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены полуокружности, которые лежат в одной полуплоскости. Найдите сумму площадей фигур, образованных при пересечении этих полуокружностей, если площадь треугольника равна S.

415*. Из всех: а) треугольников; б) четырехугольников, вписанных в данную окружность, найдите: а) треугольник; б) четырехугольник наибольшей площади.

416*. Пользуясь только циркулем и линейкой, впишите в данную окружность правильный десятиугольник.

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите радиус окружности, если ее длина равна 12π см.

2. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный четырехугольник.

3. Найдите сторону и площадь правильного шестиугольника, меньшая диагональ которого равна 4 см.

4. Сторона описанного правильного треугольника на $\sqrt{6}$ см больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

5. Найдите радиус окружности, вписанной в сектор радиуса R, если дуга сектора содержит α градусов. (Окружность считается вписанной в сектор, если она касается его дуги и радиусов.)

Вариант 2*

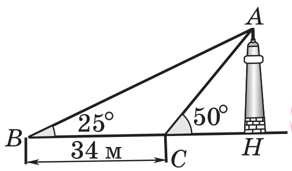
1. Дуга в 120° имеет радиус 6 см. Найдите длину этой дуги. Запишите ответ с точностью до 0,1 см.

2. С помощью циркуля и линейки опишите около данной окружности правильный треугольник.

3. Отношение числа сторон двух правильных многоугольников равно $\frac{2}{3}$, а отношение величин двух их внутренних углов равно $\frac{6}{7}$. Что это за многоугольники?

4. Известно, что сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, на 4 см больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в нее. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

5. Площадь поверхности цилиндра 100π. Найдите радиус R основания и высоту h цилиндра, если $R : h = 1 : 2$.



Глава IV

Повторение курса геометрии

§ 9. Основные методы решения геометрических задач

Изучая геометрию, вы решали разные задачи на доказательство свойств геометрических понятий, на нахождение неизвестных геометрических величин, на построение фигур. Итог решения задачи во многом зависит от того, насколько удачна его идея. Идеи решения задач основываются на анализе возможностей применения известных методов решения задач. Повторим эти методы в разных сочетаниях, рассмотрим комбинированные применения разных методов, а также решения одной и той же задачи разными методами.

1. Метод равных треугольников

Сущность метода заключается в том, что, исходя из условия задачи, отыскивают равные треугольники и применяют их свойства. При этом равные треугольники можно непосредственно найти по данным или при помощи дополнительных построений.

Задача 1. Доказать, что биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от его сторон.

Доказательство. Пусть дан произвольный угол ABC, в котором BL — его биссектриса (рис. 146). Докажем, что произвольная точка L биссектрисы равноудалена от его сторон, т. е. $LK = LH$.

Прямоугольные треугольники BKL и BHL равны по гипотенузе и острому углу, поэтому равны их катеты LK и LH.

Поскольку указанным свойством обладают все точки, принадлежащие биссектрисе BF, и не обладает любая точка, ей не принадлежащая (обоснуйте последнее сами), то биссектриса угла и представляет собой указанное геометрическое место точек плоскости.

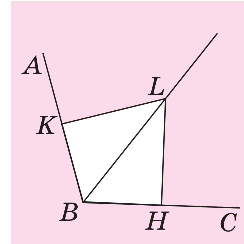


Рис. 146

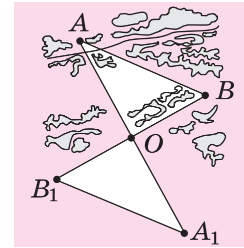


Рис. 147

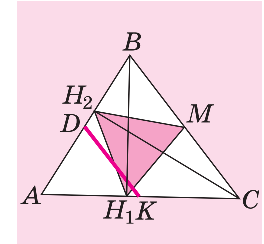


Рис. 148

Задача 2. Найти способ измерения расстояния между двумя недоступными точками A и B на местности (рис. 147).

Решение. Возьмем точку O и на луче BO отложим отрезок OB_1, равный BO, измерим равные углы A_1B_1O и ABO. Тогда $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ по второму признаку равенства треугольников; $AB = A_1B_1$. Измерив отрезок A_1B_1, получим ответ.

Задача 3. Доказать, что равноудаленные от центра окружности хорды равны.

Проведите доказательство самостоятельно.

Задача 4. В треугольнике ABC угол A равен 60°, BH_1 и CH_2 — высоты, M — середина стороны BC, $H_1H_2 = m$. Найти периметр треугольника MH_1H_2.

Решение. Построения показывают (рис. 148), что треугольник MH_1H_2 — равносторонний. Докажем это.

Сначала установим, что $MB = MC = MH_1 = MH_2 = \frac{1}{2}BC$ (обоснуйте это самостоятельно). Осталось доказать, что $H_1H_2 = 0{,}5BC$. Проведем отрезок DK — среднюю линию треугольника ABC, $DK = 0{,}5BC$; $\triangle AH_1H_2 = \triangle ADK$ по двум сторонам и углу между ними (учитывая, что в прямоугольном треугольнике с углом в 30° против этого угла лежит катет, равный половине гипотенузы). В равных треугольниках соответственные стороны равны, поэтому $H_1H_2 = DK$. Таким образом, $H_1H_2 = MH_1 = MH_2$, периметр треугольника MH_1H_2 равен $3m$.

Ответ: $3m$.

Заметим, приведенное решение задачи распространяется на случаи, когда треугольник ABC тупоугольный или прямоугольный; можно также отыскать и другое решение этой задачи, что предлагается вам в качестве задания.

2. Доказательство от противного

Этот способ решения задач на доказательство свойств фигур заключается в том, что сначала делают допущение, противоположное тому, которое утверждается теоремой (тому, которое надо доказать). Затем путем рассуждений, на основании аксиом и доказанных ранее теорем, приходят к выводу, который противоречит или аксиоме, или ранее доказанной теореме, или условию теоремы (тому, что дано). Полученное противоречие дает основание заключить, что допущение было неправильное, а поэтому правильным является утверждение теоремы.

Задача 1. Доказать, что треугольник, в котором совпадают медиана и биссектриса, — равнобедренный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (рис. 149) BM — медиана и биссектриса. Допустим, что треугольник ABC неравнобедренный. Пусть $AB > BC$. На стороне BA отложим отрезок BA_1, равный отрезку BC. Обозначим точку M_1 пересечения отрезков BM и A_1C. Тогда отрезок MM_1 является средней линией треугольника AA_1C; $MM_1 \parallel AA_1$. Так как угол BM_1A_1 — прямой, то и угол AA_1C также прямой, чего быть не может. Остается признать, что допущение неправильное, и поэтому $AB = BC$.

Задача 2. Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (рис. 150) BP и AL — равные биссектрисы. Докажем, что $\angle ABC = \angle BAC$ (откуда следует, что $BC = AC$) методом от противного.

Допустим, что $\angle ABC < \angle BAC$. На отрезке LC отметим точку M такую, что $\angle MAL = 0{,}5\angle ABC$, и точку N такую, что $NB = AM$. Тогда $\triangle BNP = \triangle AML$, откуда $\angle BNP = \angle AML$, чего быть не может по свойству внешнего угла треугольника NMK. Полученное противоречие дает основание сделать заключение, что допущение ошибочное, и поэтому $\angle ABC = \angle BAC$, $BC = AC$.

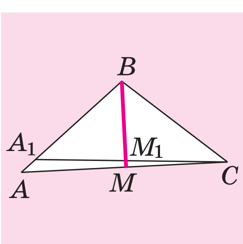


Рис. 149

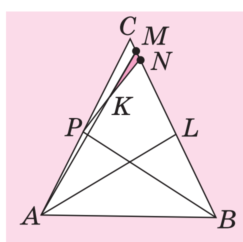


Рис. 150

Приведенные задачи, применив способ от противного, можно решить иначе. (Сделайте это самостоятельно.)

Задача 3. Доказать, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. (Докажите самостоятельно.)

3. Алгебраический метод. Применение опорных свойств

Некоторые теоремы, выражающие свойства геометрических понятий, часто применяются при решении разных задач (сами свойства называют опорными). Понятно, что перечислить все опорные свойства невозможно; с другой стороны, накопленный опыт решения задач позволяет каждому из вас выделять определенные опорные свойства и результативно применять их. Решение задач на основании опорных свойств часто осуществляется алгебраическим методом, когда составляются зависимости между геометрическими величинами и неизвестные в задаче находятся при решении соответствующих уравнений, неравенств или их систем.

Задача 1. Доказать, что треугольник, в котором совпадают медиана и биссектриса, — равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 149). По свойству биссектрисы треугольника имеем: $AM : MC = AB : BC$ (опорное свойство). Так как $AM : MC = 1$, то и $AB : BC = 1$, поэтому $AB = BC$.

Задача 2. Стороны параллелограмма 46 см и 22 см. Найти длины диагоналей параллелограмма, если известно, что они относятся как 2 : 3.

Решение. Обозначим длины диагоналей параллелограмма x и $\frac{3}{2}x$. Как известно, сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (опорное свойство). Поэтому имеем:

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 2\,(46^2 + 22^2), \text{ откуда } 13x^2 = 8\,(46^2 + 22^2),$$

$$13x^2 = 8 \cdot 4 \cdot (23^2 + 11^2),\ 13x^2 = 8 \cdot 4 \cdot 650,\ 13x^2 = 8 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 50,$$

$$x^2 = 8 \cdot 2 \cdot 100;\ x = 40,\ 1{,}5x = 60.$$

Ответ: 40 см и 60 см.

Значительное число опорных свойств получено вами ранее при решении задач ***методом подобных треугольников***, который является обобщением метода равных треугольников.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущена высота CH и проведена медиана AA_1, пересекающая высоту CH в точке M (рис. 151). Найти отношение $\frac{MC}{HM}$, если $\angle A = \alpha$.

Р е ш е н и е. Применим опорное свойство: стороны угла, пересеченные параллельными прямыми, делятся ими на пропорциональные отрезки (теорема Фалеса).

Проведем отрезок HH_1, параллельный отрезку AA_1, где $H_1 \in BC$. Тогда на основании теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{MC}{HM} = \frac{CA_1}{A_1H_1} = \frac{A_1B}{A_1H_1} = \frac{BH_1 + A_1H_1}{A_1H_1} = \frac{BH_1}{A_1H_1} + 1 = \frac{BH}{HA} + 1.$$

Из прямоугольного треугольника ACB имеем: $BC^2 = AB \cdot BH$; $CA^2 = BA \cdot AH$. Поэтому $\frac{BH}{HA} = \frac{BC^2}{AC^2}$. Тогда $\frac{MC}{HM} = \frac{BC^2}{AC^2} + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

О т в е т: $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Задача 4*. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC имеет место зависимость $l_B^2 = ac - a_1c_1$, где l_B — биссектриса треугольника, проведенная из вершины B; a, c — длины сторон BC и BA соответственно; a_1 и c_1 — длины прилежащих к сторонам BC и BA отрезков, на которые биссектриса делит сторону AC (рис. 152).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим указанную биссектрису до пересечения с ней в точке E. Проведем отрезок EC, а отрезок FE обозначим через x.

Тогда по свойству пересекающихся хорд окружности имеем: $BF \cdot FE = CF \cdot FA$ (опорное свойство), или в наших обозначениях $l_B \cdot x = a_1c_1$. Так как треугольники ABF и BCE подобны, то $\frac{l_B}{a} =$

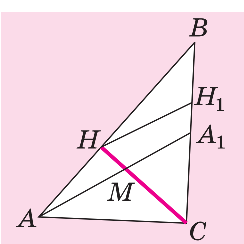


Рис. 151

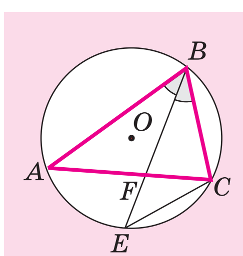


Рис. 152

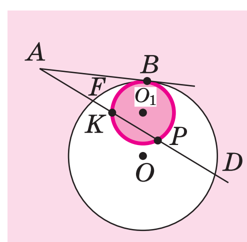


Рис. 153

$= \frac{c}{l_B + x}$, откуда $l_B^2 = ac - l_B \cdot x$. Подставив в последнее равенство вместо $l_B \cdot x$ выражение a_1c_1, получаем $l_B^2 = ac - a_1c_1$, что и требовалось доказать.

Задача 5*. Дана окружность и две точки K и P на ее хорде FD (рис. 153). Построить окружность, которая проходит через точки K и P и касается данной окружности.

Допустим, что такая окружность построена и касается данной окружности в точке B. Проведем через точки K и P секущую окружностей и их общую касательную BA. Обозначим $AF = x$, $KP = b$, $PD = c$. Тогда по свойству касательной и секущей $AF \cdot AD = AB^2$; $AK \cdot AP = AB^2$, откуда $AF \cdot AD = AK \cdot AP$. С учетом замен имеем: $x(x + a + b + c) = (x + a)(x + a + b)$, откуда $x(c - a) = a(a + b)$, $\frac{x}{a} = \frac{a+b}{c-a}$. Построив отрезок x как четвертый пропорциональный известных отрезков, определяем положение точки A.

Теперь понятно, как можно построить искомую окружность. Для этого через точку A проводим касательную к данной окружности, отмечаем точку касания (B) и строим по трем точкам B, K и P окружность.

Задача 6. Около окружности описана равнобедренная трапеция, одно из оснований которой равно a, а боковая сторона равна c. Найти площадь трапеции.

Решите задачу самостоятельно, применив следующее свойство: суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.

4. Метод площадей

Суть этого метода в том, что площадь одной и той же фигуры или равновеликих фигур выражают разными способами с целью получения зависимостей, рассмотрение которых приводит к ответу на вопрос задачи.

Задача 1. Даны две стороны a и b треугольника и угол α между ними. Найти длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины данного угла.

Р е ш е н и е. Обозначим неизвестную биссектрису x (рис. 154). Тогда, с одной стороны, площадь треугольника равна $0{,}5ab \sin\alpha$, с

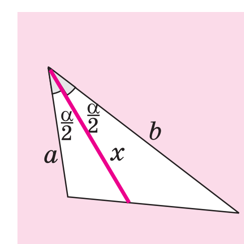


Рис. 154

другой стороны, $0{,}5ax\sin\frac{\alpha}{2} + 0{,}5bx\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}5(a+b)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot x$.

Приравняв выражения площади треугольника, получим:

$$x = \frac{ab\sin\alpha}{(a+b)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

Ответ: $\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

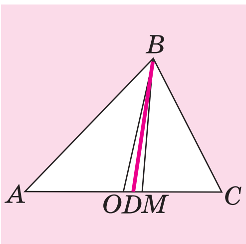


Рис. 155

Задача 2*. В треугольнике ABC проведены медиана BO, биссектриса BD и прямая BM, симметричная прямой BO (рис. 155) относительно прямой BD.

Доказать, что $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM}{MC}$.

Доказательство. $\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{BA\cdot BM}{BC\cdot BO} = \frac{AM}{OC}$;

$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle MBC}} = \frac{AB\cdot BO}{BC\cdot BM} = \frac{AO}{MC}.$$

Перемножив левые и правые части этих равенств, имеем:

$$\frac{AB\cdot BM}{BC\cdot BO}\cdot\frac{AB\cdot BO}{BC\cdot BM} = \frac{AM}{OC}\cdot\frac{AO}{MC},\ \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM}{MC}.$$

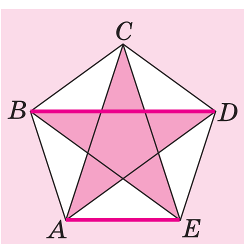


Рис. 156

Задача 3*. В пятиугольнике $ABCDE$ отрезки AB и EC, BC и AD, CD и BE, DE и AC параллельны (рис. 156). Доказать, что отрезки AE и BD параллельны.

Доказательство. $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD}$, $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle CDE}$, $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADE}$. Тогда $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}$, поэтому $AE \parallel BD$.

(Равновеликость указанных треугольников обоснуйте.)

Задача 4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найти длину его высоты, проведенной из вершины прямого угла.

Задача 5*. Около окружности описана трапеция, основания которой a и b ($a > b$). Прямые, на которых лежат боковые стороны трапеции, пересекаются под углом α. Найти радиус окружности.

5*. Метод координат

Суть этого метода в том, что для решения задачи вводят систему координат и с ее применением выясняют зависимость между данными. Систему координат выбирают таким образом, чтобы математические выкладки были удобными.

Задача 1. Доказать, что параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником.

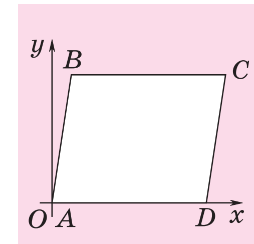


Рис. 157

Доказательство. Пусть дан параллелограмм $ABCD$. Построим систему координат xOy так, чтобы точка O совпала с точкой A, а сторона AD лежала на оси Ox (рис. 157). Обозначим координаты вершин параллелограмма: $A(0;\ 0)$; $B(x_1;\ y_1)$; $D(x_2;\ 0)$; $C(x_1+x_2;\ y_1)$.

По формуле расстояния между двумя точками с данными координатами имеем:

$$AC = \sqrt{(x_1+x_2-0)^2+(y_1-0)^2},$$
$$BD = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(0-y_1)^2}.$$

Так как по условию задачи $AC = BD$, то $(x_1+x_2)^2 = (x_2-x_1)^2$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, откуда $x_1\cdot x_2 = 0$. Из последнего равенства следует, что $x_1 = 0$, поскольку $x_2 > 0$, поэтому точка B принадлежит оси Oy. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

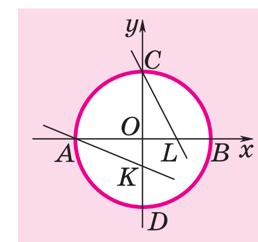


Рис. 158

Задача 2*. В окружности единичного радиуса проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. На диаметре CD взята точка K такая, что $CK : KD = 2 : 1$, на диаметре AB — точка L такая, что $AL : LB = 3 : 1$. Доказать, что прямые AK и CL пересекаются в точке, принадлежащей окружности (рис. 158).

Доказательство. Введем систему координат с началом в точке O пересечения диаметров AB и CD. Отметим координаты точек: $A(-1;\ 0)$; $K\left(0; -\frac{1}{3}\right)$; $C(0;\ 1)$; $L\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Тогда прямая AK задается уравнением $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$, а прямая CL — уравнением $y = -2x + 1$ (проверьте это самостоятельно). Общая точка этих прямых имеет координаты $x_0 = \frac{4}{5}$,

$y_0 = -\frac{3}{5}$. Так как $x_0^2 + y_0^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1^2$, то, значит, точка лежит на данной окружности.

Задача 3. Доказать, что если CM — медиана треугольника ABC, то $AC^2 + BC^2 = 0{,}5AB^2 + 2CM^2$. (Решите самостоятельно.)

§ 10. Решение геометрических задач разными способами

Задача 1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины. Докажите.

I способ. Пусть AA_1, BB_1 — две медианы треугольника ABC, которые пересекаются в точке M; A_2, B_2 — середины отрезков AM и BM (рис. 159). Тогда A_2B_2 — средняя линия треугольника AMB, A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC. Имеем: $A_2B_2 \parallel AB$, $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_2B_2 = \frac{1}{2}AB$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. Итак, $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ и $A_2B_2 = A_1B_1$, значит, $A_1B_1A_2B_2$ — параллелограмм. Поэтому точка M делит его диагонали A_1A_2 и B_1B_2 пополам. Это значит, что $AM : MA_1 = 2 : 1$, $BM : MB_1 = 2 : 1$.

Таким образом, точка M пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины. Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой M. Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке M и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

II способ. Предложите самостоятельно.

Задача 2. Дан равнобедренный треугольник. Доказать, что сумма расстояний от любой точки его основания до боковых сторон есть величина постоянная.

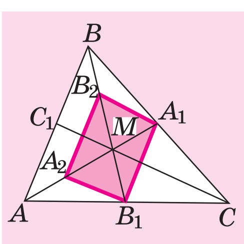


Рис. 159

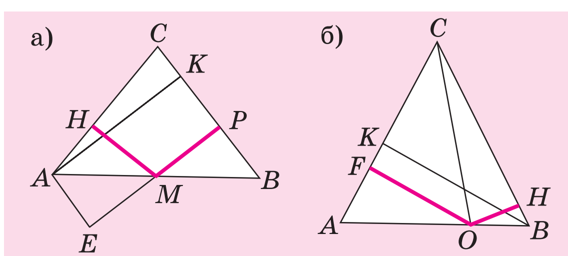


Рис. 160

I способ. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 160, *а*) $AC = BC$, MH и MP — расстояния от произвольной точки M его основания до боковых сторон. Проведем высоту AK треугольника ABC, параллельную лучу PM, и опустим на его перпендикуляр AE. Тогда треугольник AME равен треугольнику AMH (обоснуйте это сами) и $ME = MH$, поэтому $MH + MP = AK$, где длина отрезка AK (высоты треугольника) — величина постоянная.

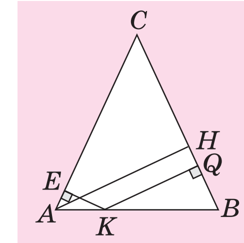


Рис. 161

II способ. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC OF и OH — указанные расстояния. Проведем отрезок OC и высоту BK треугольника ABC (рис. 160, *б*).

Тогда $S_{\triangle ABC} = 0{,}5 \cdot AC \cdot BK$;

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACO} + S_{\triangle BCO} = 0{,}5 \cdot AC \cdot OF + 0{,}5 \cdot BC \cdot OH = 0{,}5\,(OF + OH)$. Поэтому имеем: $AC \cdot BK = AC\,(OF + OH)$, $OF + OH = BK$, где BK — величина постоянная, равная длине высоты треугольника, проведенной к его боковой стороне.

III способ. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 161) $KE + KQ$ — сумма расстояний от произвольной точки K его основания до боковых сторон, AH — его высота. Из прямоугольных треугольников KQB и KEA имеем: $BK = \frac{KQ}{\sin B}$, $AK = \frac{EK}{\sin \angle CAB}$, $AB = \frac{AH}{\sin B}$.

Поскольку $AB = AK + BK$, то $\frac{EK}{\sin B} + \frac{KQ}{\sin B} = \frac{AH}{\sin B}$, откуда заключаем, что $KE + KQ = AH$, где AH — высота треугольника, проведенная к его боковой стороне.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 4$ см, а медиана $AM = 3$ см. Найти длину основания AC треугольника ABC.

Указания.

I способ. Примените теорему косинусов для треугольников ABC и AMC.

II способ. Постройте параллелограмм $ABKC$ и примените свойство: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

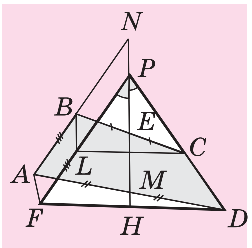


Рис. 162

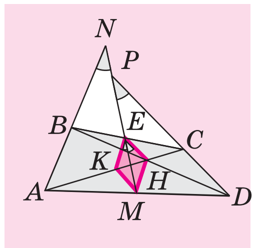


Рис. 163

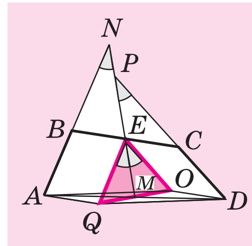


Рис. 164

III способ. Проведите высоту BH треугольника ABC, примените свойство его медиан и теорему Пифагора.

IV способ. Проведите медиану ME и высоту MP треугольника AMC и примените теорему Пифагора.

Задача 3*. Прямая, проходящая через середины противоположных сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$, образует равные углы с прямыми AB и CD. Доказать, что стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ равны.

I способ (рис. 162). Проведем отрезок PF, параллельный и равный отрезку NA, и отрезок BL, параллельный и равный отрезку AF. Тогда отрезки LF и AB равны как противоположные стороны параллелограмма. Луч PE — биссектриса угла FPD, он делит отрезки LC и FD пополам (по теореме Фалеса). Поэтому треугольники LPC и FPD равнобедренные. Тогда имеем: $FP = DP$, $LP = PC$, откуда $LF = DC$. Поскольку $LF = AB$, то $AB = DC$, что и требовалось доказать.

II способ (рис. 163). Пусть в данном четырехугольнике точка E — середина стороны BC, точка M — середина стороны AD и угол ANE равен углу DPM. Возьмем точки K и H — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Тогда четырехугольник $KEHM$ — ромб (обоснуйте это, использовав свойства средних линий соответствующих треугольников). В этом ромбе диагональ делит угол пополам, поэтому $AB = DC = 2KE$.

III способ (рис. 164). Проведем отрезки EO и EQ, соответственно равные и параллельные отрезкам AB и CD, тогда четырехугольник $AQDO$ — параллелограмм, поскольку отрезки OD и AQ равны $0{,}5BC$. Следовательно, треугольник QEO равнобедренный, так как его биссектриса EM является и медианой. Поэтому $EQ = EO = AB = CD$.

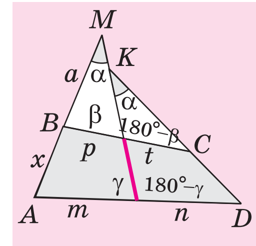


Рис. 165

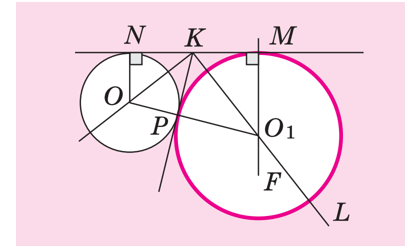


Рис. 166

IV способ (рис. 165). По теореме синусов $\frac{p}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta}$; $\frac{t}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{b}{\sin\beta}$. Разделив почленно левые и правые части этих равенств, имеем: $\frac{p}{t} = \frac{a}{b}$. Поскольку $p = t$, то $a = b$.

Аналогично $\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{x+a}{\sin\gamma}$, $\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{y+b}{\sin\gamma}$; $\frac{m}{n} = \frac{x+a}{y+b}$. Так как $m = n$, то $x + a = y + b$, а так как $a = b$, то $x = y$. Таким образом, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

Задача 4. Дана окружность и касательная к ней (N — точка касания). Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной касательной в зафиксированной на этой касательной точке M.

I способ. Допустим, что искомая окружность построена и касается данной окружности в точке P и указанной прямой в отмеченной на ней точке M (рис. 166). Проведем к этим окружностям общие касательные MN и PK (K — точка пересечения PK и MN). Тогда лучи KO, где O — центр данной окружности, и KO_1, где O_1 — центр искомой окружности, будут биссектрисами двух смежных углов NKP и MKP. Поэтому угол OKO_1 — прямой.

П о с т р о е н и е искомой окружности. Проводим прямую MF, перпендикулярную MN. Находим середину K отрезка MN и проводим отрезок KO. Строим луч KL, перпендикулярный отрезку KO. Точка пересечения KL и MF дает центр O_1 искомой окружности. Строим окружность с центром в точке O_1 с радиусом O_1M.

Проведенный анализ и построение показывают, что таким способом построена единственная окружность, удовлетворяющая всем условиям задачи.

II способ. Пусть O_1 — центр окружности, а O — центр данной окружности (рис. 167). Проводим прямую O_1M, перпендикулярную общей касательной MN этих окружностей. На прямой O_1M откла-

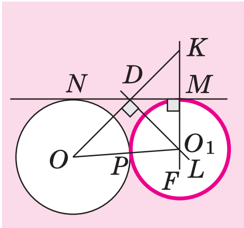


Рис. 167

дываем отрезок MK, равный радиусу данной окружности (точка M лежит между точками O_1 и K). Тогда треугольник OO_1K равнобедренный. Поэтому точка O_1 находится на пересечении серединного перпендикуляра DL к отрезку OK и прямой O_1M.

Построение искомой окружности. Проводим прямую MF, перпендикулярную MN. На прямой MF откладываем отрезок MK, равный отрезку ON (точки K и O находятся по разные стороны от прямой MN). Соединяем точки O и K отрезком и проводим его серединный перпендикуляр DL. Этот перпендикуляр пересекается с прямой MK в центре O_1 искомой окружности, радиус которой равен O_1M.

Построенная окружность действительно является искомой; так как $OD = DK$, $DK \perp O_1D$, то точка O_1 равноудалена от точек O и K; $OO_1 = KO_1$, и поскольку $MK = ON = OP$, то $PO_1 = MO_1$.

III способ. Если окружность с центром O_1 — искомая (рис. 168), то треугольник MPO_1 — равнобедренный (P — точка касания окружностей). Отложив на перпендикуляре MO_1 к отрезку MN отрезок MK, равный отрезку ON (точки K и O расположены по разные стороны от прямой MN), и соединив отрезком точки O и K, имеем равнобедренный треугольник OO_1K. Так как в равнобедренных треугольниках OO_1K и PO_1M угол O_1 при вершине общий, то углы при их основаниях равны. Тогда прямые OK и MP параллельны.

Построение. Проводим прямую MF, перпендикулярную прямой MN. На прямой MF откладываем отрезок MK, равный отрезку ON, и проводим отрезок KO. Строим прямую MP, параллельную OK (P — ближайшая к точке M точка пересечения прямой с окружностью). Отмечаем точку O_1 пересечения прямых OP и MF, являющуюся центром искомой окружности. Строим окружность с центром O_1 и радиусом O_1M.

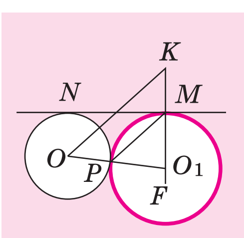


Рис. 168

Построенная окружность удовлетворяет всем условиям задачи. Проведя прямую MP, параллельную OK, имеем: $OP = MK$; $KOPM$ — равнобедренная трапеция; $\angle POK = \angle MKO$. Так как $MP \parallel OK$, то $\angle O_1PM = \angle POK$ и $\angle O_1KO = \angle O_1MP$, поэтому $\angle O_1PM = \angle O_1MP$ и $O_1P = O_1M$.

Построенная окружность единственная, удовлетворяющая всем условиям задачи.

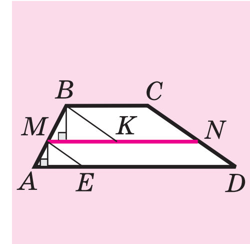


Рис. 169

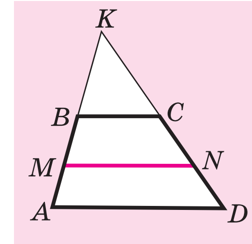


Рис. 170

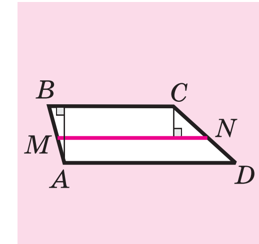


Рис. 171

Задача 5*. Найти длину отрезка, делящего трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$ на две равновеликие трапеции, заключенного между боковыми сторонами трапеции и параллельного его основаниям.

I способ. Обозначим искомый отрезок через $MN = x$, высоту трапеции $MBCN$ через h_1, а высоту трапеции $AMND$ — через h_2. Проведем отрезок BK, параллельный и равный отрезку CN, и отрезок ME, параллельный и равный отрезку ND (рис. 169).

Тогда имеем: $\frac{x+b}{2} \cdot h_1 = \frac{x+a}{2} \cdot h_2$. Треугольник MBK подобен треугольнику AME, поэтому $\frac{x-b}{h_1} = \frac{a-x}{h_2}$. Перемножив левые и правые части полученных равенств, заключаем, что $x^2 - b^2 = a^2 - x^2$, откуда $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

II способ. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K. Пусть $MN = x$ — искомый отрезок (рис. 170). Обозначим площади некоторых многоугольников: $S_1 = S_{\triangle BKC}$, $S = S_{MBCN} = S_{AMND}$. Применив свойства подобных треугольников, получим:

$$\frac{S+S_1}{S_1} = \frac{x^2}{b^2}, \quad \frac{2S+S_1}{S_1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Тогда $2 \cdot \frac{S+S_1}{S_1} - \frac{2S+S_1}{S_1} = \frac{2x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}$, $1 = \frac{2x^2-a^2}{b^2}$, $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

III способ. Пусть высота трапеции $ABCD$ — h, а высота трапеции с основаниями b и x равна h_1 (рис. 171). Тогда по формуле площади трапеции имеем: $0{,}5\,(x+b)\,h_1 = 0{,}5 \cdot 0{,}5\,(a+b)\,h$, откуда $x + b = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{h_1}$, $\frac{a-b}{x-b} = \frac{h}{h_1}$, $a + x = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{x-b}$, $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Задача 6*. Сравните сумму катетов прямоугольного треугольника с суммой гипотенузы и высоты треугольника, опущенной на нее.

Дано: a, b — длины катетов треугольника, h — длина высоты, опущенной на гипотенузу, c — длина гипотенузы.

Решение.

I способ. Поскольку $ab = ch$, то $h = \frac{ab}{c}$. Тогда $(a + b) - \left(c + \frac{ab}{c}\right) =$

$= \frac{ac + bc - c^2 - ab}{c} = \frac{ac - c^2 + bc - ab}{c} = \frac{(a - c)(c - b)}{c}$.

Последнее выражение отрицательно, так как $a - c < 0$, $c - b > 0$, $c > 0$.

Поэтому $a + b < c + h$.

II способ. Сравним квадраты указанных сумм:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 4S_{\triangle} + a^2 + b^2;$$

$$(c + h)^2 = c^2 + 2ch + h^2 = 4S_{\triangle} + c^2 + h^2.$$

Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то получаем $a + b < c + h$.

Задания для повторения курса геометрии

417. Докажите, что: а) если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом; б) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

418. Докажите, что диагонали трапеции точкой пересечения не делятся пополам.

419. Верно ли, что если диагонали четырехугольника не делятся точкой пересечения пополам, то он не является параллелограммом?

420. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, то прилежащий к нему катет равен половине гипотенузы.

421. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Сформулируйте и решите обратную задачу.

422. Найдите самый большой угол треугольника, если известно, что один из его углов равен разности двух других.

423. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC медиана BM меньше полусуммы сторон AB и BC.

424. Докажите, что если в разностороннем треугольнике ABC BM — медиана, BK — биссектриса, BH — высота, то точка K лежит между точками M и H.

425. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, делит пополам угол между его медианой и высотой, которые проведены к гипотенузе.

426. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если одна из точек касания делит гипотенузу треугольника на части, равные 3 дм и 10 дм.

427. Полуокружность с диаметром AB разделена на три равные дуги точками C и D. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 2r$.

428. Докажите, что сумма расстояний от оснований двух высот треугольника до середины его третьей стороны равна этой стороне.

429. Постройте центры двух пересекающихся окружностей, если на рисунке они не отмечены.

430. Внутри угла A дана точка B. Постройте внутри этого угла точку, равноудаленную от сторон угла и находящуюся на заданном расстоянии d от точки B.

431. Двор имеет форму треугольника. В каком месте надо вкопать столб для подвески фонаря, чтобы одинаково были освещены: а) вершины треугольника; б) ближайшие к столбу точки сторон треугольника?

432. Постройте прямоугольный треугольник по его гипотенузе c и высоте h, проведенной из вершины прямого угла. При каком соотношении между c и h задача имеет решение?

433. Постройте прямоугольный треугольник по его высоте, проведенной из вершины прямого угла, и острому углу.

434. Постройте треугольник со сторонами: а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$.

435. Постройте круг, площадь которого вдвое больше площади данного круга с радиусом R.

436. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма (отличного от ромба) при пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого равны разности двух неравных сторон параллелограмма.

437. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD, а середины сторон AB и AD соединены отрезками с вершиной C. Докажите, что эти отрезки делят диагональ BD на три равных отрезка.

438. Постройте центр симметрии параллелограмма, вершины которого недоступны.

439. Постройте параллелограмм, симметричный данному параллелограмму: а) относительно одной из его вершин; б) относительно точки пересечения его диагоналей.

440. В данный треугольник впишите ромб так, чтобы одна его сторона лежала на одной стороне треугольника, а концы противоположной ей стороны — на двух других сторонах треугольника.

441. Найдите площадь ромба, периметр которого равен 2 м, а длины диагоналей относятся как 3 : 4.

442. Найдите сторону ромба, если известно, что его площадь равна Q, а диагонали относятся как $m : n$.

443. Впишите в данную окружность четырехугольник, площадь которого наибольшая.

444. Можно ли построить четырехугольник, длины сторон которого равны: а) 4 см, 5 см, 8 см, 12 см; б) 3 см, 4 см, 6 см, 14 см?

445. Можно ли построить четырехугольник, величины углов которого относятся как 1 : 2 : 3 : 4?

446. Параллелограмм одной из его диагоналей делится на два треугольника, периметр каждого из которых равен 6 дм. Найдите длину этой диагонали, если периметр параллелограмма равен 7 дм.

447. Биссектриса одного из углов параллелограмма делит пересекаемую ею сторону на отрезки, равные 5 мм и 5 мм. Найдите периметр параллелограмма.

448. Докажите, что из всех равновеликих треугольников с данным основанием наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

449. а) На расстоянии 8 дм от центра O окружности радиуса 6 дм взята точка M. Найдите наибольшую площадь треугольника OMX, где точка X движется по окружности.

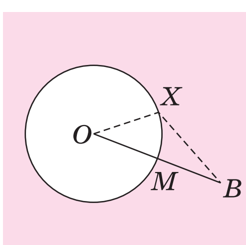


Рис. 172

б) Найдите наибольшую площадь треугольника OBX (рис. 172), если точки O, M и B — данные точки и известно, что $OM = MB = a$, а точка X движется по окружности.

450. Сторона AB треугольника ABC неподвижна, а его медиана CM, равная половине AB, вращается на плоскости около точки M. При каком положении точки C площадь треугольника ABC наибольшая?

451. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 дм, а проекция меньшего катета на гипотенузу — 1,8 дм. Найдите длину окружности, вписанной в этот треугольник.

452. Найдите площадь треугольника, если длины двух его сторон соответственно равны $\sqrt{15}$ см и 1 см, а длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 2 см.

453. Меньшая сторона параллелограмма равна 4 см, а большая диагональ — 9 см. Известно, что меньшая диагональ параллелограмма равна его большей стороне. Докажите, что косинус острого угла параллелограмма равен 0,(285714).

454. В параллелограмме даны сторона, равная 58 см, и две диагонали — 80 см и 52 см. Найдите периметр параллелограмма.

455. Дан параллелограмм, большая диагональ которого равна 5,8 см, а стороны 4 см и 2,2 см. Вычислите площадь кольца, образованного двумя окружностями, диаметры которых равны диагоналям этого параллелограмма.

456. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 м и 6 м. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна биссектрисе этого треугольника, проведенной: а) из вершины прямого угла; б) из вершины большего острого угла.

457. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника, периметр которого равен 28 см, а площадь равна 48 см^2.

458. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит ближе к вершине наибольшего угла треугольника, чем к другим его вершинам.

459. Докажите, что если две окружности касаются внешне, то любая секущая, проведенная через точку касания, отсекает от окружностей дуги, градусные меры которых равны. Выполняется ли это утверждение, если окружности касаются внутренним образом?

460. Через точку M пересечения общих внешних касательных двух окружностей проведена прямая, пересекающая одну окружность в точках A и B, а другую — в точках A_1, B_1. Найдите отношение $\frac{A_1B_1}{AB}$, если радиус одной окружности равен 6 см, радиус другой — 4 см, а расстояние между их центрами равно 12 см.

461. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности.

462. В остроугольном треугольнике ABC CP — высота, а H — точка пересечения высот. Докажите, что $CP \cdot HP = AP \cdot PB$.

463. Внутри равностороннего треугольника взята произвольная точка. Докажите, что сумма расстояний от него до сторон треугольника — величина постоянная.

464. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 108°. Докажите, что высота треугольника, проведенная к основанию, равна половине его биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

465. Через точку, данную внутри угла, проведите прямую так, чтобы отрезок ее, имеющий концы на сторонах этого угла, делился этой точкой в отношении 4 : 5.

466. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, делит его на два треугольника, площадь одного из которых в три раза больше площади другого. Найдите большую из этих площадей, если основание треугольника равно 24.

467. Докажите, что пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны, правильный, если $\angle A = \angle B = \angle C$.

468. Выведите формулу: а) суммы углов выпуклого n-угольника; б*) числа диагоналей выпуклого n-угольника.

469. Выведите формулу суммы внешних углов выпуклого n-угольника.

470*. Найдите длину диагонали правильного пятиугольника, сторона которого равна a.

471. Объясните, как можно найти угловую величину дуги AM (рис. 173), если $AB = c$, $BC = a$. Проведите расчеты: а) при $c = 5$, $a = 4$; б) при $c = 5$, $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

472. По данным на рисунке 174 найдите высоту маяка. Как бы вы нашли эту высоту, если бы угол ABC был равен 30°, а угол ACH — 55°?

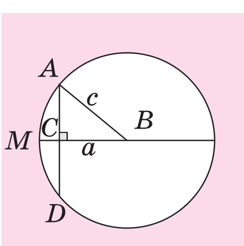


Рис. 173

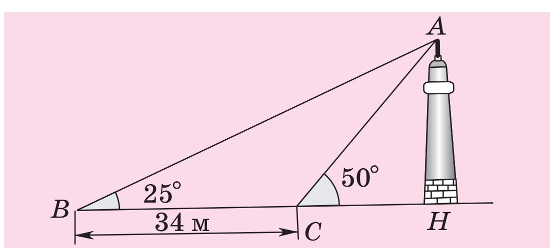


Рис. 174

473. Разность квадратов длин отрезков, на которые делит гипотенузу перпендикуляр, опущенный из середины одного катета прямоугольного треугольника, равна 16 см^2. Найдите длину другого катета.

474. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 дм. На какой угол надо повернуть этот треугольник около вершины прямого угла, чтобы катеты описали секторы, сумма площадей которых равна 25 дм^2?

475. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CH, из точки H опущены перпендикуляры HE и HK на катеты AC и BC соответственно. Найдите длину гипотенузы этого прямоугольного треугольника, если $CE = m$, а $CK = n$.

476. В треугольник вписан ромб таким образом, что один угол у них общий, а противолежащая этому углу вершина ромба принадлежит стороне треугольника и делит ее на отрезки, равные m и n. Найдите периметр треугольника, если известно, что сторона ромба равна a.

477. Боковые стороны трапеции равны 3 см и 5 см, а ее средняя линия делит трапецию на два многоугольника, площади которых относятся как 5 : 11. Найдите объем куба, ребро которого равно периметру этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

478. Разность между длиной диагонали и длиной стороны квадрата равна приблизительно 6 дм. Найдите целое приближенное значение длины стороны квадрата.

479. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка P делит диагональ AC в отношении $AP : PC = 3 : 1$. Найдите величину угла KPD.

480. Из вершины тупого угла параллелограмма проведены две высоты, угол между которыми равен 45°. Стороны параллелограмма a и b. Найдите проекцию одной из сторон этого параллелограмма на другую.

481*. Большее основание трапеции равно a, а расстояние между серединами диагоналей трапеции равно m. Найдите меньшее основание трапеции.

482*. Найдите третью сторону треугольника, если даны две его стороны a и b и известно, что медианы треугольника, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. При каких условиях такой треугольник существует?

483*. Докажите, что в любом треугольнике ABC имеет место равенство $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 (A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$.

484. Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности равен r. Найдите отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершинами которого являются точки касания окружности сторон правильного треугольника.

485. Найдите углы треугольника, если его медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят его угол на три равных угла.

486*. Существует ли треугольник, высоты которого равны 2 см, 3 см и 4 см?

487*. а) На плоскости расположены четыре точки таким образом, что попарные расстояния между точками принимают два различных значения. Наибольшее расстояние между точками равно 1. Какие значения может принимать наименьшее расстояние между точками?

488*. Бревно цилиндрической формы опилено так, что получился брус с наибольшим шестиугольным сечением. Какой процент составляют отходы?

489. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 дм и 12 дм, а высота призмы равна 10 дм. Найдите площадь поверхности призмы.

490*. Найдите отношение площадей поверхности двух шаров, если их радиусы относятся как 3 : 4.

491*. Образующая конуса равна 13 см, а его высота на 7 см больше радиуса основания. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

492*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, на 4 дм больше высоты этого параллелепипеда. Найдите площадь поверхности и объем параллелепипеда, если диагональ его основания равна d.

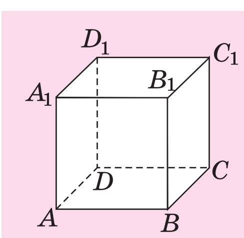


Рис. 175

493*. Покажите, что куб можно разрезать на три четырехугольные пирамиды (рис. 175).

494. Какие размеры может иметь прямоугольный лист бумаги, если известно, что из него можно вырезать развертку куба с ребром 4 см?

495*. Основание прямого параллелепипеда — ромб с диагоналями, равными 6 см и 8 см; диагональ боковой грани 13 см. Найдите площадь полной поверхности этого параллелепипеда.

496*. Цилиндрическая дымовая труба диаметром 65 см имеет высоту 18 м. Сколько квадратных метров листового железа нужно на ее изготовление, если на заклепку уходит 10 % всего необходимого количества железа?

497*. Образующая конуса равна l, S — его вершина. На основании конуса выберите две точки X и Y такие, чтобы площадь треугольника SXY была наибольшей.

498*. Найдите площадь четырехугольника, вписанного в окружность, если его стороны равны a, b, c, d.

499*. Постройте прямоугольный треугольник по данным его гипотенузе и биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла.

500*. Постройте параллелограмм по стороне, разности его диагоналей и углу между диагоналями, лежащему против этой стороны.

501*. В треугольнике ABC есть точка O такая, что $\angle ABO = \angle BCO = \angle CAO = \alpha$. Выразите $\operatorname{ctg}\alpha$ через площадь S треугольника ABC.

502*. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены внешним образом квадраты. Докажите, что расстояние между центрами квадратов, построенных на катетах, равно расстоянию от центра квадрата, построенного на гипотенузе, до вершины прямого угла.

503*. Докажите, что в любом треугольнике радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности связаны с расстоянием l между их центрами соотношением $l^2 = R^2 - 2Rr$.

504*. На диаметре AC данной окружности взята точка M, которая делит радиус окружности пополам. Проведите через эту точку хорду BD окружности так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей.

505*. Из всех секторов данного периметра найдите сектор, площадь которого наибольшая.

506*. Угол A параллелограмма $ABCK$ равен 60°, $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ дм, $CE = \frac{\sqrt{7}}{2}$ дм, где точка E — середина стороны AK. Найдите периметр параллелограмма.

507*. В параллелограмме $ABCD$ $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$. Докажите, что угол между диагоналями параллелограмма равен углу между его сторонами.

508*. Диагонали трапеции с основаниями a и b взаимно перпендикулярны. Какие значения может принимать высота h трапеции?

509*. Докажите, что центр окружности, вписанной в данный треугольник, находится внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

510*. Каждая из двух окружностей касается сторон прямого угла. Найдите отношение длин этих окружностей, если одна из них проходит через центр другой.

§ 11. Повторение курса геометрии 7—10-х классов по билетам

Билет № 1

1. Докажите один из признаков равенства треугольников.

2. Угол правильного многоугольника равен 144°. Найдите число сторон многоугольника.

3. Постройте ромб, периметр которого равен длине m данного отрезка, а диагонали относятся как 4 : 5.

Билет № 2

1. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Ромб, сторона которого равна a, делится диагональю на два равносторонних треугольника. Найдите радиус окружности, вписанной в такой ромб.

3. Постройте ломаную, гомотетичную данной незамкнутой ломаной с центром гомотетии в одном из ее концов и коэффициентом гомотетии, равным 2,5.

Билет № 3

1. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной прямой.

2. В треугольнике ABC $a = 28$, $b = 35$, $c = 42$. Найдите наибольший угол треугольника.

3. Постройте квадрат, равновеликий параллелограмму со сторонами a и b и острым углом 30°.

Билет № 4

1. Докажите один из признаков параллельности двух прямых. Сформулируйте утверждение, обратное этому признаку, и установите, справедливо ли оно.

2. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна 8 см, а один из катетов — 17 см. Найдите длину гипотенузы.

3. Разделите одну из диагоналей параллелограмма на четыре равных отрезка.

Билет № 5

1. Докажите, что сумма углов треугольника равна 180°.

2. Сумма оснований прямоугольной трапеции равна 25 см, а их разность — 13 см. Найдите площадь трапеции, если известно, что разность ее боковых сторон равна 1 см.

3. Разделите данную полуокружность на три равные дуги.

Билет № 6

1. Докажите один из признаков параллелограмма. Сформулируйте утверждение, обратное этому признаку, и установите, справедливо ли оно.

2. Установите вид треугольника, стороны которого равны 3, 5, 7.

3. Постройте круг, площадь которого в 9 раз больше площади данного круга.

Билет № 7

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника является его центром симметрии.

2. Найдите наибольшую площадь треугольника со сторонами 24 и 25.

3. Даны две точки $A\,(2;\,0)$ и $B\,(6;\,0)$. Постройте в координатной плоскости все точки M такие, для которых $MA = MB$.

Билет № 8

1. Докажите, что прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

2. Катеты прямоугольного треугольника 3 см и 4 см. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины прямого и большего острого углов и середину большего катета.

3. Постройте окружность, длина которой относится к длине данной окружности как 3 : 2.

Билет № 9

1. Докажите теорему Фалеса.

2. Найдите периметр прямоугольной трапеции, основания которой равны 8 см и 12 см, а один из углов 135°.

3. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

Билет № 10

1. Докажите, что средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна ее половине.

2. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна $2\sqrt{3}$, угол при вершине $120°$. Найдите радиус описанной окружности.

3. В данный угол впишите окружность, проходящую через данную внутри угла точку.

Билет № 11

1. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

2. Меньшая сторона прямоугольника равна 17 см. Найдите диагонали прямоугольника, если известно, что угол между ними равен $60°$.

3. Постройте треугольник ABC по его высоте, проведенной к стороне AC, и отношениям сторон $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$.

Билет № 12

1. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к ней.

2. Угол между двумя радиусами окружности равен $45°$. Найдите длину хорды, соединяющей концы этих радиусов, если известно, что радиус окружности равен 8 см.

3. Постройте равносторонний треугольник по радиусу вписанной окружности.

Билет № 13

1. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению стороны и высоты, проведенной к ней.

2. Найдите длину окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см.

3. Разделите прямой угол на три равных угла с помощью циркуля и линейки.

Билет № 14

1. Докажите, что площадь трапеции равна половине произведения суммы ее оснований и высоты.

2. В окружности проведены две параллельные хорды длиной 6 см и 8 см. Найдите длину окружности, если расстояние между этими хордами равно 7 см.

3. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них.

Билет № 15

1. Докажите теорему Пифагора: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

2. В окружность радиуса 6 см вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Вычислите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

3. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

Билет № 16

1. Докажите, что прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две его стороны, отсекает от этих сторон отрезки, им пропорциональные.

2. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, острый угол между диагоналями которого равен $38°$, $\smile CD = 58°$, $\angle B = \angle D = 90°$. Найдите неизвестные углы четырехугольника $ABCD$.

3. Постройте касательную к данной окружности, параллельную данной прямой.

Билет № 17

1. Докажите один из признаков подобия двух треугольников.

2. Площадь треугольника $3\sqrt{3}$ см^2, две его стороны равны 3 см и 4 см. Найдите третью сторону.

3. Постройте треугольник по серединам его сторон.

Билет № 18

1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

2. Сколько сторон у правильного многоугольника, если известно, что его внутренний угол на $36°$ больше центрального угла описанной окружности?

3. Постройте угол, синус которого равен $\frac{3}{4}$.

Билет № 19

1. Докажите, что прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике ABC, площадь которого 5 см^2, проведена биссектриса BD. Найдите площади треугольников ABD и DBC, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

3. Постройте центр гомотетии, при которой одна из двух данных окружностей переходит в другую.

Билет № 20

1. Докажите, что любые две окружности подобны.

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 4 см, а медиана, проведенная к ней, — 3 см. Найдите периметр треугольника.

3. Постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям.

Билет № 21

1. Докажите, что любые два гомотетичных многоугольника подобны.

2. Синус острого угла равнобедренной трапеции равен 0,8. Найдите длину боковой стороны, если разность длин оснований равна 3 см.

3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к ней.

Билет № 22

1. Докажите основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

2. Найдите площадь круга, если сторона вписанного в него правильного треугольника равна $2\sqrt{3}$.

3. Постройте треугольник по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.

Билет № 23

1. Докажите, что большему острому углу соответствует большее значение его синуса.

2. Площадь треугольника ABC с координатами вершин $A(-1;\ 0)$ и $C(2;\ 0)$ равна 6 см^2. Найдите длину высоты, опущенной на сторону AC.

3. Даны отрезки m и n. Постройте отрезок x, равный $\sqrt{\frac{mn}{2}}$.

Билет № 24

1. Докажите неравенство треугольника: сумма любых двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

2. Две точки окружности делят ее на две дуги, градусная мера одной из которых на 15 % меньше градусной меры другой. Найдите длины этих дуг, если радиус окружности равен 6 дм.

3. Постройте прямоугольный треугольник по его периметру и отношению катетов 4 : 5.

Билет № 25

1. Докажите, что $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, где α — острый угол.

2. Найдите число сторон правильного многоугольника, если внешний угол многоугольника равен $\frac{2}{3}$ его внутреннего угла.

3. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.

Билет № 26

1. Докажите, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, где α — острый угол.

2. Через концы хорды длиной 30 см проведены две касательные до пересечения в точке A. Найдите расстояние от этой точки до хорды, если радиус окружности равен 17 см.

3. Дана трапеция. Постройте фигуру, симметричную трапеции относительно прямой, на которой лежит ее средняя линия.

Билет № 27

1. Докажите теорему синусов.

2. В равнобедренную трапецию, меньшее основание которой равно 1, вписана окружность единичного радиуса. Найдите большее основание.

3. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок x, равный $\frac{2a^2}{b}$.

Билет № 28

1. Докажите теорему косинусов.

2. Стороны треугольника равны 2, 3, $\sqrt{10}$. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

3. Постройте треугольник по его углам A и B и биссектрисе, проведенной из вершины C.

Билет № 29

1. Докажите, что длина окружности радиуса R равна $C = \pi R$.

2. Найдите площадь треугольника ABC со следующими координатами его вершин: $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 4)$; $C(2;\ 0)$.

3. Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Постройте на этой прямой точку K такую, чтобы сумма длин отрезков AK и BK была наименьшей.

Билет № 30

1. Докажите, что площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$.

2. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 12 см и 18 см. Найдите сторону ромба.

3. Дан отрезок c. Постройте отрезок $x = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Билет № 31

1. Докажите, что в треугольник можно вписать окружность, и только одну.

2. Найдите расстояние от начала системы координат до середины отрезка, координаты концов которого $(-1; 4)$ и $(-1; 2)$.

3. Постройте квадрат, равновеликий трапеции с основаниями a и b и высотой h.

Билет № 32

1. Докажите, что около треугольника можно описать окружность, и только одну.

2. Определите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, если его стороны равны 6 см, 7 см и 11 см. Найдите косинус наибольшего угла.

3. Постройте правильный шестиугольник по его меньшей диагонали.

ПРИМЕРНЫЕ ГОДОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Вариант 1

1. Сравните значение числового выражения $7 \cdot 3{,}5 - 23$ с нулем.

2. Упростите выражение $-2a(3a - b) - 3b(4a + 3b)$ и найдите значение полученного выражения при $a = 1$, $b = -2$.

3. Найдите площадь ромба со стороной 14 см, если угол между стороной ромба и его диагональю равен $22{,}5°$.

4. Постройте график функции $y = 2x - x^2 - 1$ и укажите ее область значений.

5. Хорды MK и PN пересекаются, $\angle NPM = 60°$, $\angle NPK = 70°$. Найдите угол MNK.

6. Периметр треугольника равен 60 см. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, наименьшая сторона треугольника равна 12 см. Найдите длину наибольшей стороны.

7. Решите уравнение $x^2 - 10|x| + 21 = 0$.

8. Средняя линия трапеции равна 12,5, а разность оснований равна 13. Найдите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 15 и 14.

Вариант 2

1. Укажите знаменатель геометрической прогрессии 3; 6; 12; 24; ... и запишите ее пятый член.

2. Вычислите $3\operatorname{tg}^2 30° + 2\sin^2 60° + \operatorname{ctg} 45° - \operatorname{tg} 60° \cos 30°$.

3. Найдите стороны прямоугольника, если их разность равна 14 дм, а диагональ прямоугольника равна 26 дм.

4. Решите неравенство $\frac{3x-9}{2-4x} < 0$.

5. Напишите уравнение окружности с центром в точке $M(0; 6)$, которой принадлежит точка $K(-6; 2)$.

6. Пароход должен был пройти 72 км с определенной скоростью. Первую половину пути он шел со скоростью, на 3 км/ч меньшей, а вторую — на 3 км/ч большей, чем было запланировано. На весь путь пароход затратил 5 ч. На сколько минут опоздал пароход?

7. Наименьшее значение, равное -24, функция $y = x^2 + px + q$ принимает при $x = 6$. Найдите p и q.

8. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке D, а стороны AC — в точке E. Найдите площадь треугольника ADE, если известно, что $AD = 6$, $EC = 2$ и $\angle BCA = 60°$.

Вариант 3

1. Найдите корни многочлена $x^3 - x^4$.

2. Скорость моторной лодки по течению реки 23,5 км/ч, а против течения — 17,5 км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость лодки.

3. $ABCD$ — трапеция, $AB \perp AD$, $AD = 12$ см, $BC = 8$ см, $\angle BCD = 120°$. Найдите площадь трапеции.

4. Верно ли неравенство $\cos 45° + \cos 30° > 1$?

5. Постройте острый угол, синус которого равен $\frac{3}{4}$.

6. Найдите область определения функции, заданной формулой $y = \frac{3-x}{\sqrt{20-8x-x^2}} + \sqrt{x+7}$.

7. Докажите, что последовательность $b_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ является геометрической прогрессией, и найдите сумму ее шести первых членов.

8. Точка P удалена от центра окружности радиусом 11 см на расстояние 7 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Найдите длины отрезков, на которые хорда делится точкой P.

Вариант 4

1. Точка M делит отрезок AB, равный 48 см, на части в отношении 3 : 5. Найдите длину каждой части. Выберите правильный ответ: **А**: 15 см и 33 см; **Б**: 20 см и 28 см; **В**: 18 см и 30 см.

2. Вычислите: $\frac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}$.

3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x-2}}$.

4. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом 6 см.

5. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$, найдите $\sin\alpha\cos\alpha$.

6. Постройте ромб по тупому углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла.

7. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если это же двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр исходного числа. Найдите исходное число.

8. Стороны треугольника 5 см, 6 см и 7 см. Найдите его биссектрису, проведенную из вершины, противолежащей большей стороне.

Вариант 5

1. Является ли четной или нечетной функция $f(x) = 5x^6$?

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5(x+1)-x > 2x+2, \\ 4(x-1)-2 \leqslant 2(2x+1)-x. \end{cases}$$

3. Найдите углы ромба, если одна из его сторон составляет с диагональю угол 74°.

4. Два токаря решили обработать по 120 деталей за определенное время. Однако один из них выполнил задание на 5 ч раньше, так как обрабатывал в один час на 2 детали больше, чем другой. Сколько деталей обрабатывал в один час каждый токарь?

5. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 12x - 3$.

6. Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 10 см.

7. Установите, не пользуясь таблицами, верно ли неравенство: $\sin 61° \sin 62° \sin 63° > \frac{5}{8}$.

8. Постройте прямоугольный треугольник по проекциям a и b катетов на гипотенузу.

Вариант 6

1. Выпишите тождества: $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$.

2. Определите координаты вершины параболы

$$y = -x^2 - 6x + 7.$$

3. Точка O — общая середина отрезков MN и PK. Найдите угол KPM, если $\angle MNK = 49°$, $\angle KON = 63°$.

4. Площадь прямоугольника 480 дм². Найдите его стороны, если периметр прямоугольника равен 94 дм.

5. Докажите, что значение выражения $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ является рациональным числом.

6. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите длины отрезков гипотенузы, на которые ее делит высота треугольника.

7. Решите уравнение $|6-2x| = 3x + 1$.

8. Постройте треугольник по углу, отношению сторон 2 : 3, заключающих этот угол, и биссектрисе, проведенной из вершины этого угла.

Вариант 7*

1. Автомобиль, двигаясь со скоростью v км/ч, прошел за t ч расстояние, равное s км. Составьте формулу для вычисления пройденного пути. Пользуясь этой формулой, найдите s, если $v = 65$, $t = 2$.

2. Вычислите $\sqrt{16+2\sqrt{15}}\cdot\sqrt{16-2\sqrt{15}}$.

3. Периметр описанной около окружности трапеции равен 30 см. Найдите ее среднюю линию.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5(x^2-y^2)-x(x-y)=xy+11, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

5. Разделите данный отрезок на 5 равных частей.

6. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40%. Сколько надо взять лома каждого сорта, чтобы получить 140 кг стали, содержащей не менее 30 % и не более 35 % никеля?

7. Докажите, что графики функций $y = |x-2|$ и $y = |x+2|$ симметричны относительно оси Oy.

8. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной $\sqrt{\frac{12}{5}}$ так, что этот угол у них общий, а остальные три вершины лежат на сторонах треугольника. Найдите длину большего катета.

Вариант 8*

1. Найдите двадцатый член арифметической прогрессии, если $a_1 = 1$ и $d = 4$.

2. Сократите дробь $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$.

3. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого, равные $2\sqrt{3}$ дм и 8 дм, пересекаются под углом 60°.

4. Выясните, является ли функция $y = \frac{(-1+2x)^3-(1+2x)^3}{x}$ четной или нечетной.

5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, если $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$.

6. Если первый автомобиль сделает 4 рейса, а второй 3 рейса, то они перевезут меньше 21 т груза. Если же первый сделает 7 рейсов, а второй 4 рейса, то они перевезут больше 33 т груза. Какой автомобиль имеет большую грузоподъемность?

7. AB — диаметр окружности, равный 10 см, AC — хорда. Из точки B проведен перпендикуляр к хорде, равный 6 см, и касательная, пересекающая продолжение хорды в точке D. Найдите отрезок BD.

8. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y=-x^3, \\ y=|x|. \end{cases}$

Вариант 9*

1. Расположите числа в порядке возрастания: 5; $3\sqrt{3}$; 4,5; $2\sqrt{6}$.

2. Найдите нули функции $y = x^{-2} - 5\frac{1}{16}$.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, в треугольнике KLM $\angle K = 90°$, $\angle C = \angle L$. Найдите $\cos B$, если $LM = 13$ см, $LK = 5$ см.

4. Решите неравенство $\frac{x+12}{1+4x} \geqslant 12$.

5. Найдите сторону ромба, площадь которого 24 дм^2, а одна из диагоналей 6 дм.

6. Упростите выражение:

$$\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}, \text{ если } 1 < x < 3.$$

7. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

8. Расстояние между пристанями d км; скорость течения реки b км/ч. Путь туда и обратно между пристанями моторная лодка преодолевает за t ч. Найдите собственную скорость лодки.

Вариант 10*

1. Укажите, какие из данных углов находятся в первой четверти: 95°, 40°, −15°, 240°, 25°, 400°.

2. Докажите неравенство $(x-2)^2 > x(x-4)$.

3. Точка пересечения хорды CD и перпендикулярного ей диаметра AB делит диаметр на отрезки 18 см и 32 см. Найдите длину хорды.

4. Постройте график функции, заданной формулой

$$y = |x^2-4x|.$$

5. Найдите $\cos A$ в треугольнике ABC, если $A(-4; 2)$, $B(2; 4)$, $C(-1; -2)$.

6. Сплав золота с серебром, содержащий 8 г золота, сплавлен с 10 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным на 20 %. Сколько серебра в сплаве?

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби

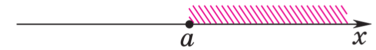
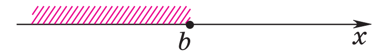
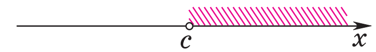
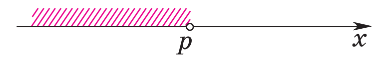
$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-3}.$$

8. Найдите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности, если даны радиус R описанной около этого треугольника окружности и площадь треугольника S.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел
$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел
$\in$ — знак принадлежности элемента множеству
$\cup$ — знак объединения множеств
$\cap$ — знак пересечения множеств
$=$ — знак равенства
$\approx$ — знак равенства (равно приближенно)
$\neq$ — знак неравенства
$>$ — знак неравенства (больше)
$<$ — знак неравенства (меньше)
$\geqslant$ — знак неравенства (больше или равно)
$\leqslant$ — знак неравенства (меньше или равно)
$|x|$ — модуль числа x
$f(x)$ — функция
a^n — степень числа a с целым показателем n
$\sqrt{a}$ — арифметический квадратный корень из числа a
$m\ \%$ — число (m) процентов ($\%$)
$c°$ — число (c) градусов ($°$)
AB — прямая AB (луч AB, отрезок AB)
AB, $|AB|$ — расстояние от точки A до точки B
$\angle A$, $\angle ABC$ — угол A, угол ABC
$\perp$ — знак перпендикулярности (прямых, лучей, отрезков)
$\parallel$ — знак параллельности (прямых, лучей, отрезков)
$\backsim$ — знак подобия фигур
S — площадь фигуры
$\Rightarrow$ — следует
$\Leftrightarrow$ — равносильно

Числовой промежуток	Рисунок на числовой прямой	Обозначение
$x_1 < x < x_2$		$(x_1; x_2)$
$x_1 \leqslant x < x_2$		$[x_1; x_2)$
$x_1 < x \leqslant x_2$		$(x_1; x_2]$
$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$		$[x_1; x_2]$
$x \geqslant a$		$[a; +\infty)$
$x \leqslant b$		$(-\infty; b]$
$x > c$		$(c; +\infty)$
$x < p$		$(-\infty; p)$

Сведения из курса математики 5—6-х классов

Делимость чисел

Пусть a и b — натуральные числа и при делении a на b в частном получается q и в остатке r. Тогда $a = bq + r$, где q и r — натуральные числа или нули, причем $r < b$. Например:

$$\begin{array}{r|l} 2001 & 666 \\ \cline{2-2} -\,1998 & 3 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$2001 = 666 \cdot 3 + 3.$

Если натуральное число a делится на натуральное число b, то a называют кратным b, а b — делителем a. Это означает, что $a = bq$, где q — натуральное число. Например, число 14 кратно 7, число 7 — делитель 14, поскольку $14 = 7 \cdot 2$.

Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два делителя — единицу и само это число.

Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Например, числа 3, 13, 5, 17, 43, 109 — простые, а 4, 112, 135 — составные.

Всякое составное число можно разложить на простые множители и притом единственным способом. Например: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$,

$5390 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11.$

$$\begin{array}{r|l} 5390 & 2 \\ 2695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем.

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5;$
$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5;$
$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2;$
НОК $(90, 60, 50) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 900;$
НОК $(11, 14, 15) = 11 \cdot 14 \cdot 15 = 2310.$

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим показателем. Например, наибольший общий делитель чисел 72, 180 и 600 равен $2^2 \cdot 3$, т. е. числу 12.

НОД $(11, 14, 15) = 1.$

Если число оканчивается четной цифрой, то оно делится на 2.

Если число оканчивается нечетной цифрой, то оно не делится на 2.

Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3.

Если сумма цифр числа не делится на 3, то и число не делится на 3.

На 4 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются двумя нулями или в которых две последние цифры выражают число, что делится на 4.

Если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5. Если число оканчивается любой другой цифрой, то оно не делится на 5.

Если сумма цифр числа делится на 9, то и число делится на 9.

Если сумма цифр числа не делится на 9, то и число не делится на 9.

Десятичные дроби

При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулем, и если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре прибавляют 1. Если первая следующая за этим разрядом цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют. Например, $4{,}376 = 4{,}4$; $28{,}195 = 28{,}20$; $101{,}425 = 101{,}4$.

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно. При этом дроби записывают одну под другой так, чтобы запятая оказалась под запятой. Например:

$$+\begin{array}{r} 5{,}065 \\ 7{,}83 \\ \hline 12{,}895 \end{array} \qquad +\begin{array}{l} 1{,}2357 \\ 0{,}469 \\ 2{,}08 \\ 3{,}90701 \\ \hline 7{,}69171 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 14{,}021300 \\ 5{,}350712 \\ \hline 8{,}670588 \end{array}$$

Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, а затем в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную, надо в делимом и делителе перенести запятые вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.

Например:

а) $\times\begin{array}{r} 3{,}06 \\ 2{,}4 \\ \hline 1224 \\ +\,612 \\ \hline 7{,}344 \end{array}$

б) $1{,}25 : 1{,}6$

$$\begin{array}{r|l} -\,12{,}5 & 16 \\ \cline{2-2} 11\,2 & 0{,}78125 \\ \cline{1-1} -\,130 & \\ 128 & \\ \cline{1-1} -\,20 & \\ 16 & \\ \cline{1-1} -\,40 & \\ 32 & \\ \cline{1-1} -\,80 & \\ 80 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

в) $12{,}096 : 2{,}24$

$$\begin{array}{r|l} -\,1209{,}6 & 224 \\ \cline{2-2} 1120 & 5{,}4 \\ \cline{1-1} -\,896 & \\ 896 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Чтобы умножить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр вправо. Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево. Например:

$$18{,}372 \cdot 100 = 1837{,}2; \ -3{,}4 : 1000 = -0{,}0034.$$

Положительные и отрицательные числа

Модулем положительного числа и нуля называется само это число. Модулем отрицательного числа называется противоположное ему положительное число. Модуль числа a обозначают $|a|$. Например: $|13{,}6| = 13{,}6$; $|-12{,}8| = 12{,}8$.

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и перед полученным результатом оставить знак «минус».

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из числа с бо́льшим модулем вычесть число с меньшим модулем и перед полученным результатом поставить знак того слагаемого, модуль которого больше. Например: $9{,}1 + (-10) = -(10 - 9{,}1) = -0{,}9$.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю. Например:

$$-13{,}4 + (-1{,}8) = -15{,}2;$$
$$12{,}5 + (-41) = -28{,}5;$$
$$-13{,}6 + 13{,}6 = 0.$$

Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $-15 - 1{,}9 = -15 + (-1{,}9) = -16{,}9$.

Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули.

Чтобы перемножить два числа с разными знаками, надо перемножить их модули и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Например: $-12 \cdot (-8) = 96$; $(-3) \cdot 1{,}2 = -3{,}6$.

Чтобы разделить отрицательное число на отрицательное, надо модуль делимого разделить на модуль делителя.

Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо модуль делимого разделить на модуль делителя и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Например: $-4{,}8 : (-2{,}4) = 2$; $55 : (-5) = -11$.

Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Обыкновенные дроби

Правильной дробью называется дробь, у которой числитель меньше знаменателя.

Неправильной дробью называется дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей: вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель; умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель. Например, приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{60}$, $\frac{3}{70}$. Наименьший общий знаменатель равен 420.

$$\frac{7}{30} = \frac{7 \cdot 14}{30 \cdot 14} = \frac{98}{420}; \quad \frac{11}{60} = \frac{11 \cdot 7}{60 \cdot 7} = \frac{77}{420}; \quad \frac{3}{70} = \frac{3 \cdot 6}{70 \cdot 6} = \frac{18}{420}.$$

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель. Например:

$$\frac{13}{7} + \frac{12}{7} = \frac{25}{7}; \quad \frac{14}{5} - \frac{11}{5} = \frac{3}{5}.$$

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями сначала их приводят к общему знаменателю

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{10} + \frac{5}{12} = \frac{45+84+50}{120} = \frac{179}{120} = 1\frac{59}{120};$$
$$\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{6-5}{8} = \frac{1}{8}.$$

Чтобы перемножить две дроби, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем.

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю. Например:

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 14} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8};$$
$$\frac{2}{3} : \frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 4} = 1\frac{1}{4}.$$

Пропорции

Равенство двух отношений называют пропорцией. Например, равенство $25 : 5 = 35 : 7$ — пропорция. Числа 25 и 7 — крайние члены пропорции. Числа 5 и 35 — средние члены пропорции. Если пропорция верна, то произведение ее крайних членов равно произведению средних членов.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc).$$

В пропорции можно менять местами крайние или средние члены:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Проценты

Процент — одна сотая доля: $1\ \% = 0{,}01$.

Например: 1 р. — это 1 процент от 100 р.; 1 см — это 1 процент от 1 м.

Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно разделить первое число на второе и полученную дробь записать в виде процентов.

Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь.

Если дано, сколько процентов от искомого числа составляет данное число, то, чтобы найти искомое число, нужно заменить проценты десятичной дробью и разделить на эту дробь данное число.

Сведения из курса алгебры

Алгебраические выражения

Числовое выражение — запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий.

Например, $1{,}2 \cdot (-3) - 9^3 : 0{,}5$ — числовое выражение.

Буквы в алгебре используются для обозначения различных чисел.

Например, если $2(a + b)$ — периметр прямоугольника со сторонами a и b, то под буквами a и b понимаются любые положительные числа.

Алгебраическое выражение — выражение, состоящее из чисел, букв, обозначающих некоторые числа, и знаков действий.

$$2(a + b);\ 13a + 2ab - 11;\ (a - b)^2;\ \frac{2x+y}{y^2-4x^2}.$$

Числовое значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены букв числами.

Например, числовое значение выражения $13a + 2ab - 1$ при $a = 2$, $b = -1$ равно $13 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 = 21$.

Одночленами называются произведения чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени с натуральными показателями.

Например: $15a^2x$; $-3a^2b^3$; $4{,}4x$; y^5 — одночлены.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней переменных, входящих в одночлен. Например, степень одночлена $0{,}8a^2b^{12}$ равна 14.

Многочленом называется сумма одночленов. Например, $3x^5 - 4x^3 + 1$, $17a^3b - ab^2 + ab + 16$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $15x^3y + 3x^2y^6 - xy$ равна степени одночлена $3x^2y^6$, т. е. равна 8.

При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например, $(-3ab + 5c^2) + (ab - c^2) = -3ab + 5c^2 + ab - c^2 = -2ab + 4c^2$.

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например, $(6x^2 - y) - (2x^2 - 18y) = 6x^2 - y - 2x^2 + 18y = 4x^2 + 17y$.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например, $a^2(3ab - b^3 - 10) = 3a^3b - a^2b^3 - 10a^2$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(5x - 1)(3x + 2) = 15x^2 - 3x + 10x - 2 = 15x^2 + 7x - 2$.

Разложением многочлена на множители называется представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяются следующие способы: вынесение множителя за скобки, группировка, использование формул сокращенного умножения. Например, многочлен $6x^3 - x^2y$ можно разложить на множители, вынося x^2 за скобки: $6x^3 - x^2y = x^2(6x - y)$; многочлен $9x - 9y - ax + ay$ можно разложить на множители, используя способ группировки: $9x - 9y - ax + ay = (9x - 9y) - (ax - ay) = 9(x - y) - a(x - y) = (x - y)(9 - a)$.

Действительные числа

Любое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби.

Определение. Число, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число, называется *рациональным*.

На координатной прямой такому числу соответствует единственная точка. Вместе с тем не всякая точка координатной прямой изображает рациональное число. На ней имеются точки, абсциссы которых не являются рациональными числами. Абсциссы этих точек являются *иррациональными* числами.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, и обратно: каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет рациональное число.

Примеры. $3{,}7 = 3{,}70000... = 3{,}7(0)$; $-5 = -5{,}000... = -5{,}(0)$; $0{,}(3) = \frac{1}{3}$; $2{,}(36) = 2\frac{4}{11}$.

Каждое иррациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, и обратно: каждая бесконечная десятичная непериодическая дробь представляет иррациональное число.

Примеры. $\sqrt{2} = 1{,}412...$; $\pi = 3{,}1415...$; $1{,}020020002...$.

Два числа называются противоположными, если их сумма равна 0.

Примеры. 5 и -5; $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ — противоположные числа, 0 противоположен сам себе.

Взаимно обратными числами называются два числа, произведение которых равно 1.

Примеры. $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{2}$; -3 и $-\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{7}$; $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ — взаимно обратные числа; число 1 обратно самому себе; для 0 обратного числа не существует.

Модулем положительного числа и нуля называется само это число. Модулем отрицательного числа называется противоположное ему число.

Геометрический смысл модуля: модуль числа a выражает расстояние от точки координатной прямой с координатой, равной a, до начала координат.

Примеры. $|7| = 7$; $|-7| = 7$; $|0| = 0$; $\left|\sqrt{11}\right| = \sqrt{11}$.

Стандартным видом числа a называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число. Число n называют порядком числа. Например, $73\,000 = 7{,}3 \cdot 10^4$; $0{,}0026 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$.

Законы действий над действительными числами

1. Переместительный закон сложения:

$$a + b = b + a.$$

2. Сочетательный закон сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Переместительный закон умножения:

$$ab = ba.$$

4. Сочетательный закон умножения:

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

5. Распределительный закон:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

6. Закон сложения числа с нулем:

$$a + 0 = a.$$

7. Закон сложения противоположных чисел:

$$a + (-a) = 0.$$

8. Закон умножения числа на единицу:

$$a \cdot 1 = a.$$

9. Закон умножения числа на нуль:

$$a \cdot 0 = 0.$$

10. Закон умножения двух взаимно обратных чисел:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1\ (a \neq 0).$$

Абсолютной погрешностью приближенного значения числа называется модуль разности числа и его приближенного значения. Например, абсолютная погрешность приближенного значения 0,3 числа $\frac{1}{3}$ равна $\left|\frac{1}{3} - 0{,}3\right| = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$.

Если абсолютная погрешность приближенного значения не превосходит некоторого числа h, то это значение называют приближенным значением с точностью до h. Например, 1,41 является приближенным значением $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01.

Если число x приближенно равно a с точностью до h, то пишут: $x = a \pm h$.

Например: $\sqrt{3} = 1{,}73 \pm 0{,}01$.

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

Равенства

Равенства могут быть верные и неверные.

Свойства верных равенств:

1. Если $a = b$, то $b = a$.

2. Если $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

3. Если $a = b$, $c \neq 0$, то $ac = bc$.

4. Если $a = b$, c — любое число, то $a + c = b + c$.

5. Если $a = b$, $a > 0$, $b > 0$, то $a^n = b^n$, $n \in \boldsymbol{N}$.

6. Если $a = b$, то $a - b = 0$.

Тождеством называется равенство, верное при всех значениях входящих в него переменных, при которых имеют смысл его левая и правая части.

Замена одного выражения другим, ему тождественно равным, называется тождественным преобразованием выражения.

Свойства действий над дробями

1. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

2. $-\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

3. $-\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

4. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, $c \neq 0$.

5. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, $c \neq 0$.

6. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

7. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

8. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

9. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Свойства степени с целым показателем

Понятие степени a^n с целым показателем n определяется следующим образом:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ если } a \in \boldsymbol{R}, n \text{ — натуральное число, большее } 1; \\ a, \text{ если } a \in \boldsymbol{R}, n = 1; \\ 1, \text{ если } n = 0, a \neq 0; \\ \dfrac{1}{a^{-n}}, \text{ если } n \text{ — целое отрицательное число, } a \neq 0. \end{cases}$$

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
4. $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \neq 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Формулы сокращенного умножения

1. Квадрат суммы двух выражений:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Квадрат разности двух выражений:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. Произведение разности двух выражений и их суммы:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

4. Куб суммы двух выражений:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

5. Куб разности двух выражений:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

6. Произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

7. Произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Неравенства и их свойства

Напомним, что если выражения A и B соединить одним из знаков $<$ ($>$, $\geqslant$, $\leqslant$), то получим запись $A < B$ ($A > B$, $A \geqslant B$, $A \leqslant B$), которую называют неравенством. Выражение A является левой частью, а выражение B — правой частью неравенства. Неравенства $A < B$ и $A > B$ считаются строгими, а неравенства $A \geqslant B$ и $A \leqslant B$ — нестрогими; $B < A < C$, $B \leqslant A \leqslant C$ — двойные неравенства.

Если обе части неравенства обозначают числа, то неравенство называют числовым.

Число a называют большим числа b, если разность $a - b$ больше нуля; число a называют меньшим числа b, если разность $a - b$ меньше нуля.

Для любых двух чисел a и b справедливо только одно из трех соотношений: или $a < b$, или $a = b$, или $a > b$.

Напомним основные свойства верных числовых неравенств.

1. Если $a < b$, то $b > a$.
2. Если $a < b$, то $b = a + c$, где $c > 0$, и наоборот, если $b = a + c$, где $c > 0$, то $a < b$.
3. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
4. Если $a < b$ и c — произвольное число, то $a + c < b + c$.
5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.
6. Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.
7. Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.
8. Если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$.
9. Если $0 < a < b$, то $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Уравнения и неравенства с одной переменной

1. Решением уравнения (неравенства) называется значение переменной, при котором уравнение (неравенство) обращается в верное равенство (неравенство). (Для уравнения решение называют также корнем.)

2. Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

3. Решить уравнение (неравенство, систему неравенств) — значит найти все его (ее) решения или доказать, что их нет.

4. Уравнения (неравенства) называются равносильными, если они имеют одни и те же решения или не имеют решений.

Некоторые виды изученных уравнений

1. Уравнение вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — числа, называется линейным уравнением с одной переменной.

При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение.

При $a = 0$, $b \neq 0$ (уравнение принимает вид $0x = b$, где $b \neq 0$) уравнение не имеет корней.

При $a = b = 0$ (уравнение принимает вид $0x = 0$) решением является любое число.

2. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — любые числа и $a \neq 0$, называется квадратным.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называется приведенным.

Если хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0, то уравнение называется неполным квадратным уравнением:

$$ax^2 + c = 0, \; ax^2 + bx = 0.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения.

Формулы корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0.$$

1. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то $x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2. Если $D = 0$, то $x = \dfrac{-b}{2a}$.

3. Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

$$x_{1,\,2} = \frac{\dfrac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}, \text{ если } b = 2k.$$

Некоторые виды изученных неравенств

1. Неравенство $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, где a и b — числа, называется линейным неравенством с одной переменной.

Например, решение неравенства $ax + b > 0$ таково:

1) Если $a > 0$, то $x > -\dfrac{b}{a}$, т. е. $x \in \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$.

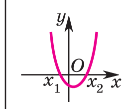
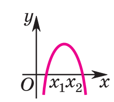
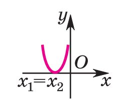
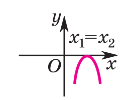
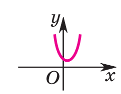
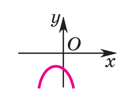
2) Если $a < 0$, то $x < -\dfrac{b}{a}$, т. е. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$.

3) Если $a = 0$ и $b > 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

4) Если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство не имеет решений.

2. Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, где x — переменная и a, b и c — числа, причем $a \neq 0$, называются неравенствами второй степени с одной переменной.

Например, решение неравенств $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ и $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ показано в таблице.

D	a	Графическая иллюстрация	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$
$D = b^2 - 4ac > 0$ $x_1 < x_2$	$a > 0$		$(-\infty; x_1] \cup$ $\cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
	$a < 0$		$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup$ $\cup [x_2; +\infty)$
$D = 0$ $x_1 - x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$a > 0$		$(-\infty; +\infty)$	$x = -\dfrac{b}{2a}$
	$a < 0$		$x = -\dfrac{b}{2a}$	$(-\infty; +\infty)$
$D < 0$	$a > 0$		$(-\infty; +\infty)$	Нет решений
	$a < 0$		Нет решений	$(-\infty; +\infty)$

Свойства арифметического квадратного корня

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a:

$$\sqrt{a} = b, \; b \geqslant 0, \; b^2 = a.$$

1. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in R$.

Напомним, что по определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$.

4. $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, если $a > b \geqslant 0$.

Корень *n*-й степени

Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Из определения корня n-й степени следует, что при всех значениях a, при которых корень $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Корни нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени.

Примеры. $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[5]{-10} = -\sqrt[5]{10}$; $\sqrt[7]{a} = -\sqrt[7]{-a}$, где $a < 0$.

Примеры решения уравнения вида $x^n = a$, где n — натуральное число:

$x^4 = 16$: $x_1 = \sqrt[4]{16} = 2$, $x_2 = -\sqrt[4]{16} = -2$;

$x^6 = 20$: $x_1 = \sqrt[6]{20}$, $x_2 = -\sqrt[6]{20}$;

$x^3 = -17$: $x_1 = \sqrt[3]{-17} = -\sqrt[3]{17}$.

Свойства арифметического корня n-й степени

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ и $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Если n и k — натуральные числа и $a \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Если n, k и m — натуральные числа и $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Функции

Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y. Ее обозначение $y = f(x)$. Переменная x называется независимой переменной или аргументом, а переменная y — зависимой переменной.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Все значения, которые может принимать функция, образуют область значений функции.

Графиком функции называется множество точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Функция называется возрастающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Функция называется убывающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Если функция убывает на всей области определения, то она называется убывающей.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если области определения этой функции наряду с каждым числом x принадлежит и противоположное ему число $-x$, и при этом верно равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если области определения этой функции наряду с каждым числом x принадлежит и противоположное ему число $-x$, и при этом верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

Функция может не обладать ни свойством четности, ни свойством нечетности.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат (рис. 176).

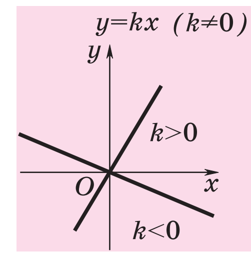


Рис. 176

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа.

Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная и a, b и c — числа, причем $a \neq 0$.

Функция, которая может быть задана формулой вида $y = x^n$, где n — натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем.

Уравнения с двумя переменными и их системы

1. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

2. Решить уравнение с двумя переменными — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

3. Уравнения с двумя переменными называют равносильными, если они имеют одни и те же решения или не имеют решений.

4. Графиком линейного уравнения с двумя переменными называется множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют данному уравнению.

5. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by + c = 0$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

6. Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

7. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение в верное равенство.

8. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Прогрессии

Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Это число называется разностью прогрессии и обозначается d.

Формулы:

1) $a_n = a_1 + d(n-1)$;

2) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$; $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число. Это число называется знаменателем прогрессии и обозначается q (из определения следует, что $q \neq 0$).

Формулы:

1) $b_n = b_1 q^{n-1}$;

2) $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$:

$S = \frac{b}{1-q}$.

Сведения из курса геометрии

Формулы геометрии

Название формул. Формулы	Обозначения
Сумма углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — величины углов треугольника
Площадь квадрата $S = a^2$	a — длина стороны
Площадь прямоугольника $S = ab$	a, b — длины сторон
Площадь параллелограмма $S = ah$ или	a — длина стороны, h — высота, проведенная к этой стороне
$S = ab \sin\alpha$ или	a, b — длины сторон, α — величина угла параллелограмма
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\beta$	d_1, d_2 — длины диагоналей, β — величина угла между диагоналями параллелограмма
Площадь ромба $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$	d_1, d_2 — диагонали ромба
Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} ah$ или	a — основание, h — высота, проведенная к этому основанию
$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ или	a, b — длины сторон, γ — величина угла между сторонами a и b
$S = \frac{abc}{4R}$ или	a, b, c — длины сторон, R — радиус описанной окружности
$S = pr$ или	p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	p — полупериметр, a, b, c — длины сторон
Площадь трапеции $S = \frac{1}{2}(a + b)h$	a, b — длины оснований, h — высота трапеции

Название формул. Формулы	Обозначения
Площадь четырехугольника $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha$	d_1, d_2 — диагонали, α — величина угла между диагоналями
Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$	c — длина гипотенузы, a, b — длины катетов
Теорема синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$	a, b, c — длины сторон, α, β, γ — величины противолежащих им углов треугольника, R — радиус описанной окружности
Теорема косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	a, b, c — длины сторон треугольника, γ — величина угла, лежащего против стороны c
Свойство сторон и диагоналей параллелограмма $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	a, b — длины сторон, d_1, d_2 — длины диагоналей параллелограмма
Площадь правильного многоугольника $S = \frac{1}{2} Pr$	P — периметр многоугольника, r — радиус вписанной окружности
Сторона правильного многоугольника $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$	a_n — длина стороны, R — радиус описанной окружности, n — число сторон многоугольника
Расстояние между двумя точками $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$(x_1; y_1)$ — координаты точки A, $(x_2; y_2)$ — координаты точки B
Длина окружности $C = 2\pi R$ или $C = \pi d$	C — длина окружности, R — радиус, d — диаметр
Длина дуги окружности $l = \frac{\pi R\alpha}{180°}$	l — длина дуги, R — радиус, α — угловая величина дуги

Название формул. Формулы	Обозначения
Площадь круга $S = \pi R^2$	R — радиус круга
Площадь сектора $S = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360°}$	R — радиус круга, α — угловая величина дуги

Формулы тригонометрии

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

5) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

7) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

8) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

9) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

10) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

11) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;

12) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

13) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

14) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

15) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;

16) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;

17) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

18) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Таблица простых чисел
(до 997)

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Единицы/ десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Таблица значений квадратных корней

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
1	1,000	3,162
2	1,414	4,472
3	1,732	4,477
4	2,000	6,325
5	2,236	7,071
6	2,449	7,746
7	2,646	8,365
8	2,828	8,944
9	3,000	9,487
10	3,162	10,000
11	3,317	10,488
12	3,464	10,954
13	3,606	11,402
14	3,742	11,832
15	3,873	12,247
16	4,000	12,649
17	4,123	13,038
18	4,243	13,416
19	4,359	13,784
20	4,472	14,142
21	4,583	14,491
22	4,690	14,832
23	4,796	15,166
24	4,899	15,492
25	5,000	15,811

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
26	5,099	16,125
27	5,196	16,432
28	5,292	16,733
29	5,385	17,029
30	5,477	17,321
31	5,568	17,607
32	5,657	17,889
33	5,745	18,166
34	5,831	18,439
35	5,916	18,708
36	6,000	18,974
37	6,083	19,235
38	6,164	19,494
39	6,245	19,748
40	6,325	20,000
41	6,403	20,248
42	6,481	20,494
43	6,557	20,736
44	6,633	20,976
45	6,708	21,213
46	6,782	21,448
47	6,856	21,679
48	6,928	21,909
49	7,000	22,136
50	7,071	22,361

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
51	7,141	22,583
52	7,211	22,804
53	7,280	23,022
54	7,348	23,238
55	7,416	23,452
56	7,483	23,665
57	7,550	23,875
58	7,616	24,083
59	7,681	24,290
60	7,746	24,495
61	7,810	24,698
62	7,874	24,900
63	7,937	25,100
64	8,000	25,298
65	8,062	25,495
66	8,124	25,690
67	8,185	25,884
68	8,246	26,077
69	8,307	26,268
70	8,367	26,458
71	8,426	26,646
72	8,485	26,833
73	8,544	27,019
74	8,602	27,203
75	8,660	27,386

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
76	8,718	27,568
77	8,775	27,749
78	8,832	27,928
79	8,888	28,107
80	8,944	28,284
81	9,000	28,460
82	9,055	28,636
83	9,110	28,810
84	9,165	28,983
85	9,220	29,155
86	9,274	29,326
87	9,327	29,496
88	9,381	29,665
89	9,434	29,883
90	9,487	30,000
91	9,539	30,166
92	9,592	30,332
93	9,644	30,496
94	9,695	30,659
95	9,747	30,822
96	9,798	30,984
97	9,849	31,145
98	9,899	31,305
99	9,950	31,464
100	10,00	31,623

Таблица тригонометрических функций от 0° до 90°

Градусы	Синусы	Қосинусы	Тангенсы	Қотангенсы	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000		90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10543	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12387	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
Градусы	Қосинусы	Синусы	Қотангенсы	Тангенсы	Градусы

Градусы	Синусы	Қосинусы	Тангенсы	Қотангенсы	Градусы
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,3205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
Градусы	Қосинусы	Синусы	Қотангенсы	Тангенсы	Градусы

Из истории математики

Известно, что еще в древние времена в математических сочинениях рассматривались задачи, которые решали с помощью уравнений. Так, в египетских папирусах (около 2000 лет до н. э.) были задачи на нахождение неизвестного, имеющее название «хау» (куча) и обозначающееся иероглифом. Например: «неизвестное, его седьмая часть и его целое составляют 19».

У Диофанта было много задач, которые решались с применением не только уравнений с одной переменной, но и уравнений с несколькими неизвестными. Например:

1. Числа 20 и 100. Нужно одно и то же число прибавить к меньшему и вычесть из большего; отношение суммы и разности равно 4.

2. Найти два числа, сумма которых равна 10, а сумма их квадратов — 68.

3. Катет прямоугольного треугольника есть точный куб, второй катет равен разности между этим кубом и его стороной, а гипотенуза есть сумма куба и его стороны. Найти стороны.

4. Найти три числа таких, наибольшее большее за среднее на одну треть наименьшего, среднее большее за меньшее на одну треть наибольшего, а наименьшее превосходит число 10 на одну треть наименьшего числа.

В индийских рукописях (IV—VII вв.) также были задачи на составление уравнений. Например: «Из четырех пожертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвертый — в четыре раза больше третьего, а все вместе дали 132 (денежные знаки). Сколько дал первый?»

Общие приемы решения уравнений с одним неизвестным разработал в IX в. Мухаммед аль-Хорезми в сочинении «Ал-джебр ва-л-мукабала». Квадратные уравнения особых видов решали древнегреческие математики, а также математики Древнего Вавилона. При измерении земельных участков древние греки (Пифагор, Евклид и др.) решали квадратные уравнения геометрическим способом. Мухаммед аль-Хорезми решал квадратные уравнения как алгебраическими, так и геометрическими способами. Задачи, решаемые с применением квадратных уравнений, имелись также в древних китайских и индийских трактатах.

Например, в китайском трактате «Начала искусства вычисления» есть такие задачи:

1. Определить стороны прямоугольного треугольника, если известны его площадь и периметр.

2. Найти число, которое, будучи умноженным на 12, после прибавления своего куба равно увеличенному в 6 раз своему квадрату, увеличенному на 35.

Общие приемы решения уравнений третьей степени разработали итальянские математики Н. Тарталья и Д. Кардано (XV—XVI вв.). Законченное изложение вопросов, связанных с решением уравнений и усовершенствованием алгебраической символики, дал французский математик Ф. Виет (XVII в.). С развитием теории решения уравнений расширились математические знания о числах.

Наряду с понятием числа в алгебре формировались другие понятия. Например, понятие степени с натуральным показателем в виде квадрата и куба числа использовалось при решении задач на вычисление площадей и объемов еще в Древнем Египте. Современная запись степени с натуральным показателем была введена Р. Декартом, причем квадрат числа он записывал как *aa*. Степени с нулевым и отрицательным показателями описаны в трудах английских математиков Дж. Валлиса и И. Ньютона (XVII—XVIII вв.).

Важное математическое понятие «функция» также формировалось на протяжении длительного времени. Идея функциональной зависимости имеет истоки в древности. Например, вавилонские математики около 4—5 тыс. лет тому назад нашли формулу для приближенного вычисления площади круга радиуса R ($S \approx 3R^2$). Понятие функции, очень близкое к современному, рассматривалось в математических трудах И. Ньютона, И. Лейбница, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского. Например, Н. И. Лобачевский в одной из своих работ писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое дает средство испытать все числа и выбирать одно из них; или зависимость может существовать и оставаться неизвестной...» Примером функции, соответствующей такой трактовке, является функция Дирихле.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

В современной математике исследование функций является одним из фундаментальных направлений ее развития (в том числе прикладных направлений). Практические задачи на исследование функций также имеют давнюю историю. Например, в одной из книг Евклида приводилось геометрическое решение такой задачи: «Доказать, что из всех параллелограммов, вписанных в данный треугольник, наибольшую площадь имеет тот, основание которого равно половине основания данного треугольника».

Формирование геометрии как науки начиналось с трудов древнегреческих ученых Фалеса, Пифагора и особенно Евклида. Например, в знаменитых «Началах» Евклида были систематизированы геометрические знания того времени и заложен аксиоматический подход к построению геометрии. Такой подход, как известно, заключается в том, что сначала вводятся основные неопределяемые понятия и основные положения об их свойствах (аксиомы), а затем на их основе с помощью рассуждений доказывают другие утверждения (теоремы). Геометрия Евклида много веков была фундаментальной.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался в XVII в. В первой половине XVII в. благодаря открытиям Р. Декарта стала интенсивно развиваться аналитическая геометрия, в которой сложились прочные связи между алгеброй и геометрией. Еще дальше геометрия как наука развивалась благодаря изобретению выдающегося русского ученого Н. И. Лобачевского.

Тригонометрия, которую можно считать и ветвью алгебры, и ветвью геометрии, имеет геометрические истоки. Например, одним из первых тригонометрические таблицы составил древнегреческий астроном Гиларх во II в. до н. э. Значительный вклад в развитие тригонометрии сделали индийские математики X—XII вв., которым были известны и основное тригонометрическое тождество, и некоторые формулы приведения, а также ученые Средней Азии (особенно Насирэддин Туси). Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли и европейские математики. Например, в XV в. немецким математиком И. Мюллером было предпринято систематическое изложение тригонометрии.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Алгебра

3. а) $a \in \boldsymbol{R}$; б) $a \in \boldsymbol{R}$.

7. а) $(-1; +\infty)$; б) $(-\infty; 9)$; в) $(-\infty; 5{,}5]$; г) $[-0{,}5; +\infty)$.

8. а) При любых, кроме $x = 0{,}5$; б) при любых x; в) при любых x; г) при $x = 0$.

10. Рис. 5, *б*; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-2; 1)$, $y = 0$ при $x = -2$ и $x = 1$. **11.** Рис. 5, *в*; $a < 0$, $c > 0$, $D > 0$.

12. Рис. 6, *а*. б) Функция возрастает при $x \in [2; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 2]$; в) функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при $x = 2$, а наибольшего значения функция не имеет.

13. Рис. 7(*а*). а) Нет решений; б) $(-\infty; +\infty)$; в) нет решений.

14. а) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; б) $\left(-3 - \sqrt{17}; -3 + \sqrt{17}\right)$; в) $(-\infty; -5] \cup$ $\cup [3; +\infty)$; г) $[-1{,}2; -1]$; д) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) 1,5; ж) $\left(-\infty; \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; +\infty\right)$; з) $(-\infty; 0) \cup (3{,}5; +\infty)$.

15. а) $(-4; 0{,}5)$; б) $\left(-\infty; 15 - 2\sqrt{55}\right) \cup \left(15 + 2\sqrt{55}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; г) $(-\infty; +\infty)$.

16. а) $[-5; 5]$; б) $\left(-\infty; -\sqrt{10}\right) \cup \left(\sqrt{10}; +\infty\right)$; в) $[-10; 10]$; г) $\left(-\infty; -\sqrt{26}\right] \cup \left[\sqrt{26}; +\infty\right)$; д) $[0; 1{,}5]$; е) $(0; 3{,}5)$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-2; 0) \cup (0; 2)$. Используя свойство $|x|^2 = x^2$ и введя замену $|x| = t$, решите неравенство $t^2 - 2t < 0$. Получив $t \in (0; 2)$, решите неравенство $0 < |x| < 2$.

17. а) $(-\infty; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$.

18. а) $(1; 3)$; б) $(0{,}4; 1)$.

19. а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений; в) $[-1; 1]$; г) $(-\infty; -0{,}25] \cup [0{,}25; +\infty) \cup 0$.

20. Например: а) $x^2 - 5x + 4 < 0$; б) $x^2 - 8x \leqslant 0$; в) $x^2 - 16 \leqslant 0$; г) $x^2 - 10{,}5x + 5 \leqslant 0$.

21. Например, $x^2 - 2x + 5 > 0$. **22.** Например, $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$.

23. Например, $x^2 - 4x + 4 < 0$. **25.** а) $(7; +\infty)$; б) $(6; +\infty)$.

26. а) 13; б) 6. **27.** а) $\left(-\infty; 3 - \sqrt{10}\right] \cup \left[3 + \sqrt{10}; +\infty\right)$.

28. а) $[-1; 4{,}5]$; б) $[-7; -0{,}25]$; в) $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right] \cup \left[\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$; г) нет решений.

29. а) $[12{,}8; 0)$; $(-\infty; -3{,}5]$.

30. а) $y > 0$ при $x \in (-\infty; -44) \cup (39; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-44; 39)$;

б) $y > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1-25\sqrt{145}}{12}\right) \cup \left(\frac{1+25\sqrt{145}}{12}; +\infty\right)$, $y < 0$ при $x \in \left(\frac{1-25\sqrt{145}}{12}; \frac{1+25\sqrt{145}}{12}\right)$.

31. а) $(-5; 6)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.
32. Каждое из неравенств а), б), в) верно, так как они приводят к виду $ax^2 + bx + c > 0$, где $a > 0$, $D < 0$.
33. Преобразуйте неравенство к виду $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$. Докажите, что решением неравенства а) являются все числа, а неравенства б) — все числа, кроме $x = 3$.
34. Меньше 4 см.
35. Одна сторона больше 4 см, а другая — больше 9 см.
36. Высота трапеции должна быть больше 3,1 дм.
37. а) Используйте свойство квадратичной функции или подстановку $q = 1 + h$, где $h > 0$. В заданиях б), в), г) — аналогично.
38. Больше 5 дм.
39. ≈ 8 с. Используйте формулу $h = \frac{qt^2}{2}$.
40. Например, $y = -(x-1)^2 + 0{,}81$; $y > 0$ при $x \in (0{,}1;\ 1{,}9)$ и $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0{,}1) \cup (1{,}9; +\infty)$.
41. Например, $y = (x-1)^2 + \frac{3}{7}$, $y > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.
42. а) При $t \in (-6; 2)$; б) при $t \in \left(1 - \sqrt{2};\ 1 + \sqrt{2}\right)$. Найдите все значения t, при которых дискриминант соответствующего квадратного уравнения отрицателен.
43. а) $x \in \left(\frac{-p-\sqrt{p^2-64}}{4}; \frac{-p+\sqrt{p^2-64}}{4}\right)$ при $p \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$, и нет решений при $p \in [-8; 8]$;
б) $x \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{1-p}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{1-p}; +\infty\right)$ при $p \leqslant 1$, $x \in \boldsymbol{R}$ при $p > 1$.
44. Наибольшее значение функции $f(x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ равно $\frac{4}{3}$, наименьшее равно $\frac{1}{3}$.
45. Обозначьте $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x$, тогда $\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} = x^2$.
46. а) При $k \in (-4; -3]$. Найдите все значения k, при которых $D \geqslant 0$ и выполняются условия $k + 1 < 0$, $k + 4 > 0$; б) используя условия $D \geqslant 0$, $9m - 5 > 0$, $-2(m+1) < 0$, найдем $m \in \left(\frac{5}{9}; 1\right] \cup [6; +\infty)$.
52. При $x \geqslant 5$.
53. а) $(-\infty; -10)$; б) $(-\infty; -20)$.
54. а) $(-1; 1)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(0; 1)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
55. а) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

56. а) $(-\infty; -5) \cup (-4; -2) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [1; 2)$;
в) $[-3; -2] \cup [2; 3]$; г) $(-\infty; -3] \cup [0{,}5; 1] \cup [2; +\infty)$.
57. а) $(-\infty; 13] \cup [13; +\infty)$; б) $[-15; 15]$.
58. а) $\left[-\sqrt{17}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{17}\right]$; б) $\left[-\sqrt{15}; 0\right) \cup \left[\sqrt{15}; +\infty\right)$.
59. а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; б) $(-6; -3)$; в) $(-\infty; +\infty)$;
г) $\left(-4-3\sqrt{3}; -4+3\sqrt{3}\right)$.
60. а) Например, $(-\infty; -1)$; б) например, $[5; +\infty)$.
61. а) -2; -1; 0,1; б) 0. **62.** а) 2; б) 1. **63.** а) -1; б) -3.
64. а) $[1; 2]$; б) $(-\infty; -8) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (5; +8)$; г) $(-1; 6)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; 3]$; е) $(-2; 0)$. Раскрывая знак модуля: при $x \geqslant 0$, $x^2 < 0$; при $x < 0$, $x^2 + 2x < 0$.
65. а) $(-\infty; 1{,}5)$; б) $(0; 6)$; в) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
г) $(-\infty; -3) \cup \left[\frac{3}{5}; -\frac{1}{3}\right)$.
66. а) $\left[-\sqrt{6{,}5}; -2\right) \cup \left(2; \sqrt{6{,}5}\right]$; б) $(-\infty; 6{,}5]$.
67. а) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (0; 3)$.
68. а) -2; б) 5. **69.** а) 0; б) 0.
70. а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет; ж) да; з) да; и) нет к) нет.
71. а) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$; б) $\left[-\sqrt{5}; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; \sqrt{5}\right]$;
в) $3 \cup (4; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup (2; 3]$.
72. а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений.
73. а) $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$;
в) $(-\infty; -2) \cup [-1{,}25; -1) \cup (1; 5]$;
г) $(-\infty; -4) \cup (-3; -2{,}5] \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$.
74. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 4)$; в) $(-8; -5] \cup [3; +\infty)$. Раскрывая знаки модулей: при $x \leqslant 0{,}5$, $x \leqslant -5$; при $0{,}5 < x \leqslant 2$, $3x \geqslant 7$; при $x > 2$, $x \geqslant 3$; г) нет решений; д) $(-\infty; 1] \cup 2$; е) $-7 \cup [-2; +\infty)$.
75. а) $[4; 5)$; б) нет решений; в) $(12{,}25; +\infty)$; г) $(-\infty; 3)$.
76. а) 1; б) 1; в) -3. **77.** а) 2,5; б) 6. **78.** а) 25 ед.; б) 1 ед.
79. а) $(-4; 4)$; б) $(-\infty; -6] \cup [7; 11) \cup (11; +\infty)$;
в) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; г) $(-5; 6)$.
80. а) $(3; -2] \cup (0; 4)$; б) $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$; в) $[1; 2] \cup (3; 4)$;
г) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
81. 2 см. **82.** 10 м. **83.** 4. **84.** -3.
85. а) $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}; +\infty\right)$ при $k > 0$, $x \in (-\infty; -1)$ при $k = 0$, $x \in \left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k}; \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k}\right)$ при $-\frac{1}{4} < k < 0$, решений нет при $k \leqslant -\frac{1}{4}$;

б) $x \in \left(\frac{-6-\sqrt{36+5k}}{k}; \frac{-6+\sqrt{36+5k}}{k}\right)$ при $k > 0$, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{12}\right)$ при $k = 0$;

$x \in \left(-\infty; \frac{-6+\sqrt{36+5k}}{k}\right) \cup \left(\frac{-6-\sqrt{36+5k}}{k}; +\infty\right)$ при $-7{,}2 \leqslant k < 0$,

$x \in (-\infty; +\infty)$ при $k < -7{,}2$;

в) $x \in \left(\frac{-k-\sqrt{k^2-24}}{4}; \frac{-k+\sqrt{k^2-24}}{4}\right)$ при $k \in \left(-\infty; -2\sqrt{6}\right) \cup \left(2\sqrt{6}; +\infty\right)$,

решений нет при $k \in \left[-2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}\right]$;

г) $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1-k}) \cup (1 + \sqrt{1-k}; +\infty)$ при $k \leqslant 1$, $x \in \boldsymbol{R}$ при $k > 1$.

86. а) больше 0; б) меньше 0; в) больше или равно 0.

87. а) $(-1; 1)$; б) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

88. $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$.

89. Сторона прямоугольника может быть больше 7 см, но меньше 12 см.

90. $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{5}$, или $\frac{3}{10}$, или $\frac{4}{17}$.

91. а) $(2; 7)$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

92. а) $(-\infty; -11] \cup [5; +\infty)$; б) нет решений; в) $(-0{,}5; 5)$; $\left[-\frac{2}{3}; 4\right]$.

93. а) $\left[-3\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}\right]$; б) $(-\infty; -9] \cup [7; +\infty)$; в) $[-8; 4)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

94. а) $\left[-\sqrt{14}; \sqrt{14}\right]$; б) $(-\infty; 7] \cup [8; +\infty)$; в) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right] \cup \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $[0; 13]$.

95. а) $(-13; 12)$; б) $(-\infty; -0{,}5) \cup (1{,}2; +\infty)$.

96. а) 2; б) таких значений нет. **97.** а) $(-1; 1) \cup (8; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

98. а) Разложите левые части неравенств на множители. б) $(x-2)(x^3 - 8) \geqslant 0$, $(x-2)^2(x^2+2x+4) \geqslant 0$, $(x-2)^2 \geqslant 0$ и $x^2+2x+4 > 0$ при любых значениях x, значит, неравенство $x^4 - 2x^3 - 8x + 16 \geqslant 0$ верно.

100. Скорость первого велосипедиста должна быть больше 10 км/ч, но меньше или равна 40 км/ч.

101. $x \in \boldsymbol{R}$, $a = b = c$; $x = 1$, если $a + b = 2c$ и $a \neq b$ или $a + b \neq 2c$ и $b = c$;

$x_1 = \frac{a+c-2b}{a+b-2c}$, $x_2 = 1$, если $a + b \neq 2c$ и $b \neq c$.

102. При $p \in (-6; 2)$.

105. а) $[5; 10)$; б) $(-\infty; 4]$; в) $[7; +\infty)$; г) 3.

106. а) $(-1; 3)$; б) $[-18; 27]$; в) $(-1; 4)$.

107. а) $[5; +\infty)$; б) $(-\infty; 10)$; в) нет решений; г) $[-2; 3]$.

108. а) $[1; +\infty]$; б) $(1; +\infty)$.

109. а) $(-\infty; 2)$; б) $(1; 4]$; в) $(1; 7)$; г) нет решений.

110. а) $(-3; 3)$; б) $[-4; 4]$; в) $(-1; 3)$; г) $[-9; 1]$.

111. а) $\left[5\frac{2}{3}; +\infty\right)$; б) $[0{,}5; +\infty)$.

112. а) $[0; 0{,}2]$; б) $(-26; -13)$.

113. а) $(-\infty; 1]$; б) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $[3; 5]$; г) $[-1; 1{,}75]$.

114. а) $\left[\frac{18}{47}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -1\frac{2}{7}\right]$; в) $(-4{,}75; 0{,}5)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$;

д) $\left(-26{,}5; \frac{7}{16}\right)$; е) $\left(1\frac{3}{14}; +\infty\right)$.

115. а) $(5{,}5; 6{,}5)$; б) $[-11; 1]$; в) $(0{,}5; 2]$; г) $[0; 4{,}8)$.

116. а) $\left(-4\frac{1}{14}; 7{,}5\right)$; б) $[-6; 6)$; в) $(0{,}25; 3{,}25]$; г) $\left(-3\frac{9}{11}; -1\frac{3}{11}\right)$.

117. а) $\left[-2\frac{17}{30}; 2\frac{23}{30}\right]$; б) $\left[\frac{7}{30}; \frac{13}{30}\right]$; в) $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$; г) $[-6; 6]$.

118. а) -1; б) 2; в) 14; г) -2.

119. а) $(-\infty; -0{,}2) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; 3) \cup (3; 4]$.

120. а) $(-3; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

121. а) нет решений; б) $(-1; 2)$; в) $[-2; 1]$; г) $(-\infty; -3] \cup [-2; -1] \cup [0; +\infty)$.

122. а) 1; б) 5; в) нет наибольшего целого решения.

123. а) 3; 4; 5; б) 2; 3; 4; 5.

124. а) $[0; 0{,}9) \cup (3{,}5; +\infty)$; б) $[0{,}5; 2{,}5]$.

125. а) $(1; 1{,}5)$; б) 2; в) $[6; 9)$; г) $(-1; 0) \cup (0; 0{,}5]$.

126. а) $\left(1\frac{17}{35}; +\infty\right)$; б) $\left(\frac{13}{48}; \frac{6}{17}\right)$.

127. а) 2; б) 3.

128. а) $[5; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)$; г) нет решений; г) $(2; +\infty)$.

129. а) $(-\infty; 1{,}5]$; б) $(-3; -1)$; в) $(-\infty; 3]$; г) $(-\infty; 1]$.

130. а) $(3{,}5; 4)$; б) $(3; 3{,}5)$.

131. 3; 4; 5.

132. При $n \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

133. При $a \in (-\infty; -8) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

134. а) При $c \in [5; +\infty)$; б) при $c = 0$. **135.** При $a \in (3; +\infty)$.
136. При $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2{,}5)$.

137. При $p \in \left(-1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. **138.** При $k \geqslant 1$. **139.** 79.

140. а) Больше 4 см, но меньше 13 см; б) больше 7 см, но меньше 14 см.
141. Больше 10 км, но меньше 16,25 км.
142. От 4 км/ч до ≈ 5,3 км/ч.

143. $\frac{4}{15}$.

144. Нужно взять не меньше 20 кг, но не больше 40 кг лома с 5 % содержанием никеля, и не менее 100 кг, но не более 120 кг лома с 40 % содержанием никеля.
145. Не менее 2 л, но не более10 л.
146. а) $(-\infty; a)$; б) $(b; +\infty)$; в) $[a; b]$; г) нет решений.

147. а) $(-3; 1)$; б) $(-\infty; -5)$; в) $[5; +\infty]$; г) нет решений; д) $\left(\frac{13}{48}; \frac{33}{40}\right)$; е) $(2{,}92; +\infty)$.
148. а) 1; 2; б) 2; 3.
149. а) $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$; б) $(0{,}4; 1)$.
150. а) $[0; 7]$; б) $[-14; 0]$; в) $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty]$.
151. $(-\infty; -21)$.
152. а) $(-2; 1)$; б) $[-4; 3]$; в) $(-\infty; -13) \cup (3; +\infty)$.
153. $(-\infty; -4] \cup [7; +\infty]$. **154.** 24.

155. Надо взять риса более чем $19\frac{1}{21}$ кг, но не менее $31\frac{47}{63}$ кг, а ячменя более $76\frac{4}{21}$, но не менее $126\frac{62}{63}$ кг. **156.** 16.
157. Каждый рабочий изготавливал в день по 7 деталей.
158. Собственная скорость лодки должна быть не менее 4,25 км/ч, но не более $6\frac{1}{3}$ км/ч.

159. а) Не менее 10 л, но не более 20 л; б) не менее 15 л, но не более 35 л.

160. а) $\left[1\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; 8]$; б) $(-1; 5)$; в) $\left(-\infty; 2\sqrt{2}\right) \cup \left(2 + 2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

161. При $a \in (-\infty; 1)$. **162.** При $p \in (-\infty; -3)$. **163.** При $p \in [-1; 0]$.
164. а) При $a \in [4; +\infty)$; б) при $a \in (-5; -1]$; в) при $a \in (-\infty; -5)$.
166. $a_1 = 2$, $a_3 = 8$, $a_{10} = 29$. **167.** $x_n = 2n + 5$. **168.** $b_1 = 11$, $d = 15$.
169. в) 21. **170.** $S_{30} = 300$. **172.** $x_1 = 81$, $x_3 = 9$, $x_5 = 1$, $S_3 = 1053$.
173. Является. **175.** 30.

176. а) 1, 4, 7, 10, 13, ...; б) 43, 36, 29, 22, 15, ...;
в) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ...; г) 1, 4, 9, 16, 25, ...
177. а) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, ...; б) 2, 4, 8, 16, 32, ...;
в) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, ...; г) 4, −8, 16, −32, 64, ...
178. а) 44; б) 79; в) −37; г) −42. **179.** а) 4; б) 2; в) 1; г) 0,5.
180. а) $a_n = 5n - 4$; б) $a_n = 29 - 4n$; в) $a_n = -2n - 2$; г) $a_n = 6 - 5n$. **181.** 1428.

182. 1) $d = -\frac{4}{3}$, $n = 4$; 2) $d = 3$, $n = 7$; 3) $d = -2$, $a_n = -4$; 4) $d = 2$, $a_n = 17$.
183. 122,5 м.
184. а) 63,7 м; б) 240,1 м. **185.** 15 рядов, 465 шаров.
187. в) −24, 36, −54, 81, −121,5, ...; г) 0,4; $0{,}4\sqrt{2}$; 0,8; $0{,}8\sqrt{2}$; 1,6; ... .

188. а) $q = -2$, $c_3 = 32$; б) $q = \sqrt{2}$, $c_4 = 4\sqrt{2}$; в) $q = 3\sqrt{3}$, $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

189. а) Геометрическая прогрессия, $q = 4$; б) арифметическая прогрессия, $d = 4$; в) геометрическая прогрессия, $q = 0{,}25$; г) арифметическая прогрессия, $d = -0{,}5$; д) арифметическая прогрессия, $d = 0$, и геометрическая прогрессия, $q = 1$; е) нет.

190. $3{,}5 \cdot 10^4$ м^3. **191.** $P_6 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

192. 180 раз. **193.** а) 735; б) 204.
194. За 6 часов. **195.** 11.
196. $2^{64} - 1 = 18\,446\,543\,761\,604\,151\,616$ (18 квинтиллионов 446 квадриллионов 543 триллиона 761 миллиард 604 миллиона 151 тысяча 616).
198. $S_7 = 0{,}25$. **199.** 3, 6, 12, 24 или −9, 18, −36, 72. **200.** $1024a$.

201. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{9}$; в) 2; г) $90\frac{10}{11}$.

202. Например: а) 4, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{4}{125}$, ...; б) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, ...; в) $0{,}9\sqrt{3}$, $0{,}09\sqrt{3}$, $0{,}009\sqrt{3}$, ...; г) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{8}$, ...

203. а) $100 + \frac{100}{3} + \frac{100}{9} + \frac{100}{27} + ...$; б) $180 - 36 + 7{,}2 - 1{,}44 + 0{,}288 + ...$; в) $75 + 37{,}5 + 18{,}75 + 9{,}375 + ...$; г) $50 + \frac{100}{3} + \frac{200}{9} + \frac{400}{27} + ...$.

204. а) 2; б) $4 - 3\sqrt{3}$.

205. $R_2 = \frac{1}{3}R_1$, $R_3 = \frac{1}{9}R_1$, ..., $R_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} R_1$. Центры всех таких окружностей лежат на биссектрисе угла, а радиусы, проведенные в точки касания, перпендикулярны стороне угла. Если через центры окружностей провести прямые, параллельные стороне угла, получим прямоугольные треугольники. Используя свойство прямоугольного треугольника с углом в 30°, получим: $R_2 + R_1 = 2(R_1 - R_2)$, отсюда $R_2 = \frac{1}{3}R_1$; $R_3 + R_2 = 2(R_2 - R_3)$, отсюда $R_3 = \frac{1}{3}R_2$. Рассуждая аналогично, $R_n = \frac{1}{3}R_{n-1}$. Значит, $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$ образуют убывающую геометрическую прогрессию $\left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$.

206. 6 или 12. **207.** а) $2{,}01(06) = 2\frac{4}{375}$; б) $5{,}25(21) = 5\frac{208}{825}$; в) $0{,}00(1) = \frac{1}{990}$; г) $0{,}28(3) = \frac{17}{60}$. **208.** а) $\sqrt{2} + 1$; б) $0{,}5\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

209. а) $\frac{4}{3}(4^n - 1)$; б) $\frac{x^{2n-2} - 1}{x^2 - 1}$. **210.** $a = b = c$.

211. а) $q = 3$; б) 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

212. Используя подобие треугольников, получим: $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_1$, $a_4 = 4a_1$ и так далее, $a_n = (n - 1)\,a_1$. Значит, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ образуют арифметическую прогрессию ($d = a_1$). Или предложите другой способ доказательства, проведя через точки, полученные на стороне BA угла, прямые, параллельные стороне BC, и используя теорему Фалеса.

213. Сделайте чертеж, используя указания к задаче **205**. Из подобия полученных треугольников следует: $\frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2 + R_3}$, а отсюда $(R_2)^2 = R_1 \cdot R_3$. Рассуждая аналогично, находим, что $(R_n)^2 = R_{n-1} \cdot R_{n+1}$, а, значит, $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$ — образуют геометрическую прогрессию.

214. $\frac{2p^2 - \sqrt{p^4 - 27S^2}}{3p}$; $\frac{2p}{3}$; $\frac{2p^2 + \sqrt{p^4 - 27S^2}}{3p}$.

215. Получится.

216. 6 насосов. Нельзя наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час.

222. а) $\pm\sqrt[4]{2}$; б) $\pm\sqrt{7}$; в) $\pm\sqrt[6]{a}$. **223.** а) 2; б) 3; в) 3.

224. а) $3\sqrt{x}$; б) $y\sqrt[3]{5}$; в) $a^2\sqrt[4]{3}$; г) $-b\sqrt[4]{2}$.

225. а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[6]{5}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{a}$.

226. а) $\sqrt{b}$; б) $\sqrt{-b}$. **227.** $\sqrt{a^2} = |a|$, поэтому $\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$.

228. а) 21; б) 1; в) 0; г) −4; д) −2; е) $\frac{2}{3}$; ж) −1; з) 0.

229. а) $\sqrt{3x^2}$; б) $-\sqrt{5y^2}$; в) $\sqrt[3]{54a}$; г) $\sqrt[5]{-96b^2}$; е) $-\sqrt[6]{7m^8}$.

230. а) $x\sqrt{2}$; б) $-3y\sqrt{2}$; в) $3b\sqrt[4]{2b}$; г) $-3c\sqrt[4]{2c^2}$.

231. а) 6; б) 30; в) 0,4; г) 6; д) −1,5; е) −0,8; ж) 80; з) 0,5; и) $\frac{4}{3}$; к) 90; л) 36; м) $-\frac{4}{3}$; н) 6; о) 3; п) 20.

232. а) 4; б) 3; в) 5; г) 5; д) a; е) $10a^2$; ж) $\frac{1}{3}|xy^3|$; з) $\frac{3a^3x^2}{4y}$; и) $-ax^2$.

233. а) $\sqrt{7|ab|}$; б) $|a| \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}$; в) $\sqrt{2|ab^3|}$; г) $\sqrt{3xy^4}$; д) $\sqrt{\frac{2ab^3}{3xy^2}}$, е) a^2b^3. **234.** а) 1; б) 1.

235. а) $\sqrt[5]{8}$; б) $-\sqrt[7]{5}$; в) $\pm\sqrt[4]{19}$; г) нет корней; д) −3; е) ±2,5.

236. а) $\sqrt[3]{V}$; б) $\sqrt[3]{V^2}$; в) $6 \cdot \sqrt[3]{V^2}$.

237. а) 1, если a и b одинаковых знаков; −1, если a и b разных знаков; б) $\sqrt[3]{\frac{5}{3}a}$; в) $\frac{\sqrt[4]{1-a^2}}{|a|}$.

238. а) $x = 125$, $x > 125$, $x < 125$; б) $x = 16$, $x > 16$, $0 < x < 16$.

239. а) Больше нуля; б) меньше нуля; в) больше нуля; г) меньше нуля.

240. а) $0 < \sqrt[3]{x} < 1$; б) $1 < \sqrt[3]{x} < 10$; в) $10 < \sqrt[3]{x} < 1000\sqrt[3]{10}$.

241. а) $x \geqslant 2$; б) $x \leqslant 2{,}5$; в) $x \in \boldsymbol{R}$.

242. а) 1) 0; 1; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(0; 1)$; б) 0; ±1; 2) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

245. а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; 9]$; в) $x \in \boldsymbol{R}$; г) $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$; д) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; е) $[2; 4]$. **246.** а) 5; б) $\frac{5 + 5\sqrt{17}}{2}$; в) 15; г) 17.

247. а) $(-\infty; 6]$; б) $(-2{,}75; +\infty)$; в) $[1; 50)$; г) $[1; +\infty)$.

248. а) $21 - 2\sqrt{110}$; б) $\frac{10\sqrt{10} - 31}{13}$; в) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; г) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$.

249. а) 2,4; б) 0,3; в) $\frac{45}{49}$; г) 1,35.

250. а) 2; б) ±2; в) −3; г) $\sqrt[9]{3}$.

251. а) $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{0{,}3}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt[5]{0{,}2}$.

253. а) $\left(\sqrt[9]{13} - \sqrt[9]{7}\right) > \left(\sqrt[9]{12} - \sqrt[9]{8}\right)$; б) $\left(\sqrt[10]{15} - \sqrt[10]{5}\right) > \left(\sqrt[10]{14} - \sqrt[10]{7}\right)$.

254. а) 0; 1; б) 4; в) 4; г) 3; д) нет корней; е) −5; 4; ж) 9.

255. а) −1; б) 2; в) 3; г) 3,5; д) −0,5; е) $\frac{1}{32}$. **256.** а) ≈ 0,2; б) ≈ 33,0.

257. 9. **259.** а) $[1; +\infty)$; б) $(0; 1]$.

261. а) $\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$; б) нет корней (представьте левые части уравнений в виде: а) $(x - 1)^2 - \left(\sqrt{x} + 2\right)^2$; б) $(x - 3)^2 + \left(\sqrt{x} - 2\right)^2$. **262.** 68.

265. Воскресенья в одном месяце, чередуясь, выпадают на четные и нечетные числа; так как три из них выпадали на четное число, то всего в этом месяце было пять воскресений, поэтому первое из них могло быть только второго числа, откуда 20 число — четверг.

267. а) 60; б) 78. **268.** а) 3024. **269.** 362 880. **270.** а) 9^5; б) 10.

271. в) $\frac{n(n-3)}{2}$.

273. 5. Обозначьте количество игроков, которые должны были выступить за команду A, через m, а количество игроков, которые должны были выступить за команду B, через n $(n > m)$.

Планировалось сыграть mn партий. Первое условие приводит к уравнению $mn = 4(m + n)$. Второе уравнение (одно) написать нельзя, так как неизвестно, к каким командам относились заболевшие игроки. Возможны три случая:

1) если заболели игроки команды A, то $(m - 2)n = mn - 17$;
2) если заболели игроки команды B, то $(n - 2)m = mn - 17$;
3) если заболели по одному игроку из команд A и B, то $(m - 1)(n - 1) = mn - 17$.

274. 0,15. **275.** $\frac{4}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{7}$. **276.** $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. **277.** 0,75.

278. $\frac{2}{9}$; б) $\frac{2}{n-1}$. **279.** $\frac{1}{n}$. **280.** а) Нет; б) нет; в) нет.

283. Да, 8 см. 7; 8; 9 или 6; 8; 10 или 5; 8; 11.

285. Проведя через точки деления прямые, параллельные боковой стороне трапеции, докажите, что длины искомых отрезков образуют арифметическую прогрессию, где $a_1 = 11$, $d = 1{,}5$, $a_{11} = 26$. $S_{(2-10)} = 166{,}5$.

287. 1600. **288.** Могут. **290.** Нет.

291. а) $b_1 = 128$, $n = 7$; б) $b_1 = 7$, $n = 5$; в) $b_1 = 3$, $b_8 = 384$; г) $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$.

293. 16 807.

294. а) 24, 27, 30, ... или 24, 24, 24, ...; б) $a_1 = 48$, $a_2 = 72$, $a_3 = 108$, $a_4 = 162$; $b_1 = 47$, $b_2 = 64$, $b_3 = 81$, $b_4 = 98$. Преобразуйте каждое уравнение системы к виду: $b_1 = a_1 - 1$, $d = a_1q - a_1 - 7$, $a_1(q^2 - 2q + 1) = 12$, $a_1(q^3 - 3q + 2) = 42$. Разделив левые и правые части 3-го и 4-го уравнений, получим $2q^3 - 7q^2 + 8q - 3 = 0$; $q = 1$ — корень уравнения, поэтому разделив многочлен, стоящий в левой части уравнения, на $q - 1$, получим $2q^2 - 5q + 3 = 0$. Откуда $q_1 = 1$, $q_2 = 1{,}5$; $q = 1$ — не удовлетворяет условию задачи.

295. Высота фигуры $2a$, площадь полной поверхности — $8a^2$.

296. а) Могут, $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; б) могут, например, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$; в) 6, 6, 6 или 4, 6, 9.

298. а) $\frac{46}{27}$; б) $\frac{7}{25}$.

299. б) $\sqrt[3]{8x}$; в) $-9a\sqrt{-a}$; г) $2(1 - x)$; д) $\sqrt{|a-b|}$; е) $4 - \sqrt{2}$.

300. а) 2; б) 4; в) 2; г) 5.

301. а) $\sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$; в) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}} < \sqrt[3]{7}$.

302. а) $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}} < \sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}} < \sqrt[16]{64}$; б) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[10]{25}$. **303.** 2; 10.

304. а) $\frac{7\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2}-2}{30}$; б) $\frac{3-\sqrt[4]{9}}{6}$. Разложите знаменатели дробей на множители: а) $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(2+\sqrt[3]{2}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{3^2}+1\right)\left(\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3}\right)$ и домножьте числители и знаменатели дробей на:
а) $\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)\left(4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{3^2}-1\right)\left(\sqrt[4]{3^2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(3+\sqrt[4]{3^2}\right)$.

305. а) Нет решений; б) $m\left(1+\sqrt{2}\right)$ км.

306. 1) 0,1; $\sin 30°$; $\sqrt{16}$; 1,(25); 0.
2) Может, например, $\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)=2$; $\sqrt{5}-\sqrt{5}=0$.
4) $36\frac{6}{643}$; 6) а) 1; б) 0,25; в) 0,25; 7) $\sqrt[3]{3}$; 8) 1.

307. а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) верно, но нерационально; е) нет.

308. а) 3; б) $2\frac{2}{3}$; в) 0,04; г) $5\frac{2}{3}$; д) 4899; е) 5900.

309. $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$. **310.** 200 км. **311.** Дешевле.

312. а) 111 страниц; б) 560 женщин.

313. а) $\approx 0{,}55$, абсолютная погрешность равна $\frac{1}{220}$, относительная погрешность равна 0,8 %; б) да.

314. а) 25 000; б) 4; в) $\frac{1}{9}$; г) $21\frac{1}{3}$.

315. а) $\frac{7}{96}$; б) $\frac{36}{49}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; д) 4,5; е) 2.

316. а) 3,125; б) 1,25; в) 160 000; г) $38\frac{1}{9}$. **317.** $\frac{19^{10}+1}{19^{11}-1}$.

318. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да.

319. а) $\frac{\sqrt{7}}{6}\approx 0{,}4$; б) $\frac{4\sqrt{14}}{15}\approx 1$; в) 70; г) $\frac{23}{81}$.

320. а) $\sqrt{10}$; б) 21; в) $7\sqrt{2}$; г) $\sqrt{15}$; д) $71 + 2\sqrt{14}$; е) $2\sqrt{6} - 1$.

322. а) 8; б) $-3\frac{1}{9}$; в) ≈ 1; г) ≈ 11. **323.** а) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

324. а) $3{,}5\sqrt{3}$; б) $0{,}3\sqrt{2}$; в) $\sqrt{200}$; г) $\sqrt{0{,}01}+\sqrt{3}$.

325. Например: а) 2^{-2}; б) $\sqrt{2}+2$.

326. а) $\frac{(-2{,}2)^{\circ}-(0{,}25)^{-1}}{\cos 135°}$; б) $\frac{(0{,}04)^{-1}-(-0{,}2)^{\circ}}{\sin 30°}$; в) $4 - \sqrt{7} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

327. а) $31\left(\sqrt{2}+1\right)$; б) 1023.

328. а) $\approx 1{,}2$; б) $\approx 1{,}6$; в) $\approx 1{,}9$.

329. 1) 0; 2) $a \geqslant 8$; 4) а) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; 5) $0{,}11\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; 6) б) нет.

330. а) $S_{20} = 550$, $b_2 = \dfrac{2}{27}$; б) $S_5 = \dfrac{242}{729}$, $q = \dfrac{1}{3}$.

331. а) $(x-3)\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)$; б) $(x+4)\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)$.

332. $\dfrac{x^7+x^6+x^4+1}{x^8}$. **333.** а) $\dfrac{y-9}{y^2-16}$, $\dfrac{28}{51}$; б) $\dfrac{63c-42}{9c^2-1}$, $39\dfrac{3}{8}$.

334. а) Нет; б) является. **335.** а) $\dfrac{x+2}{2x-3}$; б) $\dfrac{x-4}{3x+1}$.

337. а) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$; б) $\dfrac{x+y}{x-y}$. **338.** а) $x + 7$; б) -1. **339.** а) $\dfrac{-c}{8b}$; б) $-\dfrac{3}{x}$.

340. а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) нет; е) да; ж) нет; з) нет. **341.** а) Нет; б) да.

342. а) $5\sqrt{p}$; б) $-8\sqrt{c}$; в) 2; г) $-|y|$; д) $4\sqrt{ab}$, если $a > 0$, $b > 0$, или $-4\sqrt{ab}$, если $a < 0$, $b < 0$.

343. а) $\dfrac{2}{a-1}$; б) 1; в) $x - 1$. **344.** а) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; б) 0; в) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; г) 1, если $0 < \alpha < 180°$, или -1, если $180° < \alpha < 360°$.

345. Представьте каждую из дробей левой части равенства в виде разности дробей, например $\dfrac{1}{(c-1)(c-2)} = \dfrac{1}{c-2} - \dfrac{1}{c-1}$.

346. $\dfrac{a^{32}-1}{a-1}$, если $a \neq 1$; 32, если $a = 1$.

347. а) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; б) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
в) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

348. а) $(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$; в) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
г) $\left(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}\right)\left(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}\right)$.

349. а) $a = 5$, $b = 62$, $c = 139$, $d = -1$; б) $a = 4$, $b = -10$, $c = -53$, $d = -246$.

350. а) 4; б) 1.

351. 1) -1, 0, 1; 2) 0, 1; 3) 4; 4) 5; 6) а) имеет два решения; б) не имеет решений; в) не имеет решений; г) имеет одно решение. 7) а) $x \geqslant 2$; б) $x \leqslant -3$; в) $x \in \boldsymbol{R}$.

352. а) $x = 7 : (-14) = -0{,}5$; б) $(x - 1)(3x - 6) = 0$, $x = 1$ или $x = 2$; в) $\dfrac{3{,}4}{x} = \dfrac{3{,}4}{x}$, x — любое число, кроме 0.

353. а) 17; б) $7\dfrac{1}{6}$; в) 1,2; г) $1\dfrac{1}{22}$.

354. а) $[-0{,}11;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ \dfrac{52}{123}\right)$; в) $\left(-\dfrac{5}{6};\ \dfrac{5}{6}\right)$; г) $\left(-\infty;\ -\dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3};\ +\infty\right)$. **355.** а) 3; б) $34\dfrac{29}{64}$. **356.** а) -2; б) -2.

357. а) 0; б) 0; 0,4; в) нет решений; г) 0,4; д) $-1{,}5$; 2; е) -4; 1,5; $x = c + p$.

358. а) -2; б) -3. **359.** а) -3; 4; б) -4; 0,5; в) $-1\dfrac{2}{3}$.

360. а) Верно; б) верно. **361.** $(\cos 15° - \cos 75°)\sin 15°$.

362. а) $(\operatorname{tg} 30° - \sin 60°)(\sin 136° - \operatorname{tg} 136°) = \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{6} \times$
$\times \dfrac{\sin 136°(\cos 136°-1)}{\cos 136°} = \dfrac{-\sqrt{3}}{6}\cdot\operatorname{tg} 136°\cdot(\cos 136°-1) < 0$; б) больше 0.

363. а) 1; б) 16; в) нет корней.
364. Например: а) $x^2 - 8x + 13 = 0$; б) $x^2 - 6x + 4 = 0$.
365. а) $k > -1$; б) при $k < -4$ или $k > 4$. **366.** а) 4; б) -1; в) -2; 1.

367. а) $[0;\ 16]$; б) $\left[-\dfrac{9}{4};\ \dfrac{11}{4}\right]$; в) $(-\infty;\ -24) \cup (24;\ +\infty)$; г) $[-38;\ 34]$; д) $(-\infty;\ -6) \cup (-4;\ +\infty)$; е) $(-4;\ 1)$. **368.** а) 1; б) 10.
369. а) $[-2;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 3) \cup (3;\ 4]$.
370. а) (0,5; 3); б) нет решений; в) множество решений вида $(x;\ 4x - 2)$, где x — любое число; г) (20; 15).

371. а) $(-2;\ -7)$, $(7;\ 2)$; б) $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; в) $(-2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $\left(-\dfrac{1}{7};\ -\dfrac{\sqrt{13}}{7}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{7};\ \dfrac{\sqrt{13}}{7}\right)$; г) (4; 9), (9; 4).

372. $[5;\ 6]$. **373.** $[-5;\ -3{,}5]$. **374.** а) Нет решений; б) $(-\infty;\ 0{,}5)$; в) $\left(-\dfrac{1}{6};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1) \cup (4;\ +\infty)$.

375. а) При любых x, кроме 0; б) при $y < 0$.
376. а) $(-1{,}5;\ 0]$; б) $[0{,}7;\ +\infty)$; в) $(-3;\ -1)$; г) $[2;\ 8] \cup 3$.
377. а) $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{6}$; б) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{1}{3}$; в) ± 1; г) 0; 4; 7; д) $\pm\sqrt{2}$, 0; е) -4; 2.
378. а) $2a$, $-2b$; б) $x = -1$ при $a = b \neq 0$; $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = b = 0$; $x_1 = \dfrac{a}{a-b}$, $x_2 = -1$ при $a \neq b$. **379.** $c = 0{,}32$.

380. а) Рассмотрим разность: $\left(\dfrac{1}{a\sqrt{a}} - \dfrac{1}{b\sqrt{b}}\right) - (a - b) =$

$$= \frac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a} - ab\sqrt{ab}\,(a-b)}{ab\sqrt{ab}} = \frac{\left(\sqrt{b}\right)^3 - \left(\sqrt{a}\right)^3 + ab\sqrt{ab}\left(\left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2\right)}{ab\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(b+\sqrt{ab}+a+ab\sqrt{ab}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\right)}{ab\sqrt{ab}} < 0,$$ так как по условию $a > b > 0$, то $\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right) < 0$, а $\left(b+\sqrt{ab}+a+ab\sqrt{ab}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\right) > 0$ и $ab\sqrt{ab} > 0$.

Значит, $\left(a\sqrt{a}\right)^{-1} - \left(b\sqrt{b}\right)^{-1} < a - b$.

382. Введя замену $x - \frac{1}{x} = a$ и решив неравенство $a^2 + 4a + 3 < 0$, найдем, что $-3 < x - \frac{1}{x} < -1$. Далее, решив систему неравенств $x - \frac{1}{x} > -3$, $x - \frac{1}{x} < -1$, установим, что $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

383. а) $[-5; -1)$; б) $(-6; -3{,}5) \cup (1; +\infty)$; в) $[-18; -2)$; г) $[3; +\infty)$.

384. 4) а) $[-4; +\infty)$; б) $[1; +\infty)$.

385. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\left[-\sqrt{13}; \sqrt{13}\right]$; в) $\left(-\infty; 5\frac{2}{3}\right]$. **388.** а) 1; б) -3.

390. а) Прямая, параллельная оси абсцисс, проходящая через точку $(0; 4)$; в) прямая $y = x + \sqrt{3}$, на которой отсутствует точка с абсциссой, равной $\sqrt{3}$; г) $y = x$ при $x \geqslant 0$ и $y = 0$ при $x < 0$. Графиком является объединение двух лучей, выходящих из начала координат и лежащих на биссектрисе первого координатного угла и на оси абсцисс.

392. Пусть $f(x) = kx + b$, $g(x) = -kx + b$. Так как $f(x) = g(-x)$ и $f(-x) = g(x)$, то графики функций $f(x)$ и $g(x)$ симметричны относительно оси ординат.

393. а) $y = -1{,}25x + 5$; в) $y = 0{,}8x - 4$. **394.** а) Верно; б) верно.

395. а) Нет; б) принадлежит. **396.** а) $y = 8$ при $x = \pm 2\sqrt{2}$; б) $y = 8$ при $x = \frac{1}{8}$.

397. а) Нет; б) да.

399. $y = x + 2$, $x \neq 3$, график — прямая, на которой нет точки $(3; 5)$.

401. а) -3; б) -3. **402.** а) -1; б) $\sqrt{5}$; в) -2; 7; г) -4; 5.

403. $y = x^2$, $x \neq 0$. Точка B принадлежит графику этой функции, а точка C — нет.

404. а) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq -1$; нет; б) нет. Пусть $a > b \geqslant 1$. Оценим знак разности $f(a) - f(b) = \frac{a+1}{a^2+1} - \frac{b+1}{b^2+1} = ... = \frac{ab(b-a)+(b^2-a^2)-(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)} =$ $= \frac{(b-a)(ab+b+a-1)}{(a^2+1)(b^2+1)} = \frac{-(a-b)(b(a+1)+(a-1))}{(a^2+1)(b^2+1)} < 0$, значит, $f(a) < f(b)$.

Получили: большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, значит, функция $f(x)$ убывает при $x \geqslant 1$.

405. 3. (Получили прямоугольный треугольник с катетами, равными $\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.)

406. Сравните графики функций $f(x) = x^4$ и $g(x) = x - 0{,}5$. Или выделите два полных квадрата в левой части исходного неравенства.

407. а) Упростите функцию: $y = \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}$, $y = \left|\sqrt{x-4}+2\right| + \left|\sqrt{x-4}-2\right|$. При $x \in [4; 8]$ $y = 4$, при $x \in [8; 13]$ $y = 2\sqrt{x-4}$; б) $y = \sqrt{x} + 2$, $x \neq 4$. **408.** $y = |x-2| + |x-3|$.

409. а) $A = \frac{(x-3)(x-5)+2}{\sqrt{x^8}+13^0} = \frac{x^2-8x+17}{x^4+1}$, при любом x $x^4 + 1 > 0$ и $x^2 - 8x + 17 > 0$, значит, A — положительное число при $x \in \boldsymbol{R}$;

б) $B = \frac{-(x+4)(x+5)+7}{\sqrt{x^3}} = \frac{-x^2-9x-13}{x\sqrt{x}}$, при $x > 0$ $(-x^2 - 9x - 13) < 0$, а $x\sqrt{x} > 0$, значит, B является отрицательным числом при $x > 0$.

410. а) $y_{\min} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $y_{\max} = \sqrt{7}$; в) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$ $= \sqrt{2}\sin(x + 45°)$. Так как $0 \leqslant x \leqslant 45°$, $45° \leqslant x + 45° \leqslant 90°$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant$ $\leqslant \sin(x + 45°) \leqslant 1$, $1 \leqslant \sqrt{2}\sin(x + 45°) \leqslant \sqrt{2}$. Значит, $y_{\min} = 2\sqrt{2}$, $y_{\max} = 4$.

411. При $m > 11$.

412. а) $y = 4x - 11$; б) $x = -3$ или $x = 2$ (две прямые, параллельные оси ординат); в) $y = -\frac{18}{x}$; г) окружность с центром в точке $(3; -2)$ и радиусом, равным 4.

413. 3) За $\frac{6}{11}$ месяца; 4) ≈ 80 раз.

414. а) 30 т, 10 т, 25 т; б) 42 и 33 куста. **415.** а) 1120 га; б) $938\frac{4}{7}$ га.

416. а) 6 рейсов; б) 5 т и 3 т. **417.** а) 16 мест; б) 8 мальчиков.

418. а) Нет; б) существуют. **419.** а) 0,75; б) 12; 24; 36; 48.

420. а) 48; 80; 12; 12; б) 520.

421. а) $d_1 = 81{,}6$ мм, $d_2 = 61{,}2$ мм; б) $d_1 = 6{,}4$ см, $d_2 = 8$ см;

422. а) Больше 7 дм, но не больше 12 дм; б) не менее чем 34,6°, и не более 43,6°.

423. а) Через $\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ч; б) $d = \sqrt{m^2+n^2}$.

424. а) За 14 дней; б) за 9 дней.

425. а) 3 ч; б) 10 км/ч; в) 4 м/с, 3 м/с.

426. а) Больше 5 ч, но меньше 15; б) более 10 км/ч, но не более 40 км/ч.

427. а) 2; 5; 8; б) 12; 7; 2 или 3; 7; 11. **428.** а) 200 г; б) 70 кг.

429. а) За $\frac{2c-p+\sqrt{p^2+4c^2}}{2}$ и $\frac{p+2c+\sqrt{p^2+4c^2}}{2}$ дней;

б) по $\frac{\sqrt{t^2k^2+4tkn}+tk}{2t}$ и по $\frac{\sqrt{t^2k^2+4tkn}-tk}{2t}$ т.

Правильные ответы в тестовых заданиях:

1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** б). **5.** г). **6.** в) и г). **7.** г). **8.** в). **9.** г). **10.** а). **11.** б). **12.** б). **13.** в). **14.** а). **15.** в). **16.** б). **17.** а). **18.** б). **19.** а). **20.** г). **21.** г).

Геометрия

1. II, III координатной четверти. **2.** а) $\sin 10°$; б) $\cos 20°$; в) $\cos^2 100°$.
3. Нет; существует; существует. **4.** а) Нет; б) нет. **5.** Может, например, $\sin(-200°) > 0$.
7. 30°; 150°; 30°; 150°. **8.** $\operatorname{tg} 13° < \operatorname{tg} 37° < \operatorname{tg} 73°$.
13. а) 2,4; б) $-\frac{8}{15}$ или $\frac{8}{15}$.
14. а) Положительный; б) отрицательный.

15. а) $1\frac{5}{12}$; б) $1\frac{47}{108}$.

16. а) $(-\infty; 3,5]$; $(-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$; в) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; +\infty)$.
17. а) Да; б) да. (Преобразуйте левую часть равенства, умножив числитель и знаменатель дроби на $(1 - \sin\alpha)$.)
18. а) $-\frac{1}{9}$; б) $-\frac{1}{9}$ или -9. (Разделите числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$.)

19. а) 270°; б) 0°, 180°, 360°. **20.** а) Верно; б) верно. $\left(\text{Замените } \cos 40° \text{ и } \sin 50° \text{ меньшим числом } \frac{\sqrt{2}}{2}.\right)$

22. Преобразуйте данное равенство и примените теорему косинусов.
23. а) 14 см; б) 13 см. **24.** 15 см, 13 см, 14 см. **25.** $1 : \sqrt{3} : 2$.
26. а) Могут; б) нет.
27. $\approx 48°$, $\approx 58°$, $\approx 74°$. (Используйте теорему косинусов или метод площадей.)
28. ≈ 4 дм, ≈ 8 дм.

29. 5 см. $\left(\frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin 2A},\ \sin 2A = \frac{3\sin A}{2},\right.$ но $\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$, значит, $\cos A = \frac{3}{4}$. По теореме косинусов составьте уравнение: $4^2 = 6^2 + c^2 - 2 \cdot 6 \cdot c \cdot \frac{3}{4}$, откуда $c^2 - 9c + 20 = 0$, $c_1 = 5$, $c_2 = 4$ — не удовлетворяет условию задачи.$\left.\right)$

30. 3,5 см. (Используйте утверждение: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.)

31. $P = 8{,}8$ см. **32.** 36 см, 42 см. **33.** 44 см.
34. Продлите медиану AA_1 и отложите отрезок $A_1D = m_a$. Тогда четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Далее используйте свойство сторон и диагоналей параллелограмма: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.
35. 7 дм, ≈ 8 дм, ≈ 11 дм. **36.** $\approx 9{,}2$ дм²; б) $\approx 2{,}4$ см². **37.** $\approx 3{,}2$ см, $\approx 3{,}8$ см.
38. $\approx 4{,}2$ см. **39.** $\approx 23°$, $\approx 67°$, 90°. **40.** $\approx 53°$, $\approx 60°$, $\approx 67°$.

41. а) 84 см²; б) $\approx 4{,}5$ дм²; в) $17\frac{1}{3}$ мм²; г) 3,5.

42. 20 см, 30 см. **43.** 20 см, 30 см.

44. 150°. (По условию имеем: $a^2 = d_1 \cdot d_2$, отсюда $\frac{d_1}{a} \cdot \frac{d_2}{a} = 1$ или $\frac{d_1}{2a} \cdot \frac{d_2}{2a} = \frac{1}{4}$. Обозначьте половину острого угла ромба α, тогда из последнего равенства следует $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}$ или $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, значит, $2\alpha = 30°$. Тупой угол ромба равен $180° - 30° = 150°$.)

45. а) $h = 2{,}4$ см, $BD \approx 3{,}7$ см, $AC \approx 4{,}8$ см; б) $h = 12$ дм, $BD = 20$ дм, $AC \approx 23$ дм.

46. Используя метод площадей и формулу $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, получим, что длина биссектрисы $l = 12\cos\frac{\alpha}{2}$ (где α — угол треугольника между данными сторонами).
47. 1224 см². (Площадь параллелограмма равна площади треугольника со сторонами 74 см, 40 см, 102 см.)
48. ≈ 220 см². **49.** $\approx 2{,}1$ дм. **50.** 7 см.
51. На высоте $\approx 8{,}66$ м и на расстоянии 5 м от мачты. **52.** Верно.
54. $\cos 120°$. **55.** $\operatorname{tg} 76°$. **56.** $\approx 4{,}2$ м. **57.** $\approx 9{,}76$ м. **60.** а) $\approx 7{,}83$ м; в) $\approx 4{,}38$ м.
61. а) Верно; б) нет; в) верно. **62.** 1, например, $\operatorname{ctg} 48° \cdot \operatorname{ctg} 42°$.
64. 25 см². **66.** $\approx 9°$. **67.** $\approx 31{,}7$ м. **68.** $\approx 66{,}5$ см. **69.** а) $\approx 15{,}4$ см; б) 14,2 см.

70. $\frac{25\sqrt{2}}{16}$ дм². **71.** 15 см. **72.** 1,8 см, 4,5 см².
73. $P = 4\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ см, $S = 16\left(\sqrt{3} - 1\right)$ см².
74. а) $\approx 6{,}26$ дм, $\approx 7{,}4$ дм²; б) ≈ 26 м². **75.** а) 75 дм²; б) $\approx 41°$, $\approx 19{,}8$ см².

76. $a = 6\sqrt{5}$, $b = 12\sqrt{5}$, $c = 30$, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin C = 1$.

77. 12. **78.** 45°. **79.** $\approx 1{,}4$ дм. **80.** Остроугольный.

81. а) Прямоугольный, $S = 54$ см²; б) тупоугольный, $S = \frac{35\sqrt{119}}{4}$ см²; в) остроугольный, $S = 0{,}5\sqrt{87}$ см².
82. а) Тупоугольный; б) остроугольный. **83.** $\approx 20{,}9$ см².
84. ≈ 136 см², $\approx 61{,}9$ см. **85.** $BC = 40$ см, $BK = 48$ см. **86.** а) $\sqrt{2}$; б) $0{,}5\sqrt{10}$.
88. $h_1 = 2{,}5$ см, $h_2 = 2{,}5\sqrt{2}$ см, $S = 25$ см². **89.** 2 дм². **90.** $\approx 1{,}16$ м.

91. Можно: $a = \dfrac{p\sin A}{\sin A + \sin B}$, $b = \dfrac{p\sin B}{\sin A + \sin B}$, где p — известная сумма сторон $(a + b)$.

92. $\approx 3{,}9$ м. **93.** $a = \dfrac{d}{2\cos\dfrac{\beta}{2}}$, $d_2 = d\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, $S = \dfrac{1}{2}d^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

94. а) $\dfrac{3\cos\alpha + \sin\alpha + 1}{\cos\alpha}$; б) $b^2\left(\sin\delta + \dfrac{1}{4}\sin 2\delta\right)$. **95.** $ab\cdot\sin\beta$. **96.** $\approx 4{,}82$ м.

97. а) $\angle B = 65°$, $AB \approx 25{,}5$ см, $AC \approx 24{,}0$ см; б) $AC \approx 7{,}4$ см, $\angle A \approx 39°$, $\angle C \approx 31°$; в) $\angle B = 90°$, $AB \approx 11{,}5$ см, $CB \approx 9{,}6$ см; г) $\angle C \approx 15°$, $\angle B \approx 125°$, $AC \approx 6{,}4$ см.

98. $0{,}5\cdot d^2$. **99.** $d\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{4\sin^2(\alpha+\beta)} - \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}}$.

100. $\dfrac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$ $\left(\text{или } \dfrac{a\cdot\sin 2(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}\right)$. **101.** $\dfrac{ab\cdot\sin\alpha}{a\cdot\sin\beta + b\cdot\sin(\alpha-\beta)}$.

102. $0{,}5h^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$.

103. а) $\dfrac{p^2\sin^2 3\alpha\cdot\sin 4\alpha}{2\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{b^2\sin 2\beta}{2(1+2\cos\beta)}$. **104.** $\dfrac{(m^2 - n^2)\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}$.

105. а) $\dfrac{\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; б) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; в) $BH = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $CK = \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

106. а) $\sin A = \dfrac{a\sin B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos B}}$; б) $\sin C = \dfrac{c\sin B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos B}}$; в) $\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos B}$; г) $0{,}5\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\cos B}$;

д) $0{,}5\sqrt{a^2+4c^2-4ac\cdot\cos B}$;

е) $\sqrt{a^2+x^2-2ax\cdot\cos B}$, где $x = \dfrac{ac}{a+\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos B}}$; ж) $\dfrac{2ac\cdot\cos 0{,}5B}{a+c}$;

з) $\dfrac{ac\sin B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos B}}$; и) $c\sin B$; к) $0{,}5ac\sin B$.

107. а) $\cos A = \dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$; б) $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; в) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;

г) $\cos\delta = \dfrac{a^2+c^2-5b^2}{2\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}$; д) $180° - 0{,}5(\angle A + \angle B)$;

е) $(90 - x)°$ или $(90 + x)°$, где $x° = \angle CBE$ и $\cos x = \dfrac{3a^2+c^2-b^2}{2a\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}$;

ж) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

108. $R = \dfrac{-c\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

109. $(\operatorname{tg}\angle ACA_1 + \operatorname{tg}\angle FAC) < \operatorname{tg}\angle ACF$.

110. а) $b = 21$ см, $\angle A \approx 44°$, $\angle B \approx 46°$; б) $c = 25$ см, $\angle A \approx 74°$, $\angle B \approx 16°$; в) $b \approx 11$ см, $a \approx 25$ см, $\angle A \approx 66°$; г) $c \approx 77$ см, $b \approx 29$ см, $\angle B = 56°$.

111. а) $h = 5\sqrt{3}$ см, $S = 50\sqrt{3}$ см^2; б) $h = 8$ см, $S = 64$ см^2.

112. а) $AB = 4\sqrt{3}$ см, $AC = 10$ см, $S = (24 + 6\sqrt{3})$ см^2; б) $BC = 10$ см, $AB = 13$ см, $S = (30 + 12{,}5\sqrt{3})$ см^2.

113. $2a\sin 0{,}5\alpha$, $2a\cos 0{,}5\alpha$.

114. а) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{13}{3}}$; б) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$;

в) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$; г) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{22}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{22}}$.

116. $-\dfrac{16}{65}$. **117.** $\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$. **118.** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\dfrac{3}{8}$.

119. а) $\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg}75° = 2 + \sqrt{3}$. **120.** -9.

121. 0,6, если $90° < \alpha < 180°$, или $-0{,}6$, если $180° < \alpha < 270°$.

122. а) 0,75; б) $-2{,}4$. **123.** а) 1; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg}2\alpha$; г) 1; д) -1; е) 0.

124. г) Умножив и разделив левую часть неравенства на $\sqrt{2}$, можно ее заменить на $\sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$, а синус любого угла меньше 1.

125. а) $(0; 1]$; б) $[16; +\infty)$; в) нет решений; г) $(-\infty; -3)\cup(-1; 1)\cup(3; +\infty)$.

126. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha} + \sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha}$.

127. 13 см или ≈ 39 см. **128.** $\approx 53°$, $\approx 59°$, $\approx 68°$. **130.** $\sqrt{3}$.

132. Нет. (Предположив, что $\sin B = 0{,}75°$, найдите $\sin C$.)

133. ≈ 48 см^2. (Площадь трапеции $ABCD$ с основами AD и BC равна площади треугольника ACE, где $CE \parallel BD$ и точка E лежит на прямой AD.)

134. $(1 + \sqrt{3})$ см. (Можно использовать прямоугольный треугольник ACH, $\angle H = 90°$, где $CH = h$, $AH = 2 + h$ и $\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$ (**119, а**).)

135. 2 см, 8 см.

137. 2,4. (Стороны данного треугольника равны n, $n + 1$, $n + 2$, а его площадь равна $n + 3$, где n — натуральное число больше 1. Выразите площадь треугольника по формуле Герона и составьте уравнение $\dfrac{n+1}{4}\sqrt{3(n+3)(n-1)} = n + 3$. Откуда $3(n + 1)^2(n - 1) = 16(n + 3)$. Получили кубическое уравнение $3n^2 + 3n^2 - 19n - 51 = 0$, которое имеет единственный корень $n = 3$. Значит, искомый треугольник имеет стороны 3, 4, 5 — это прямоугольный треугольник.)

138. $c(\sqrt{3} - 1)$. $\left(\text{Используйте то, что } \sin 75° = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\right)$

139. $\dfrac{(a-c)\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\gamma}}{2(a+c)}$. **140.** ≈ 27 см.

144. 60°, 30° или 140°, 110°. **145.** 36° или 101°. **154.** 160°. **155.** 1,4.
156. 30° или 150°. **157.** 4 см. **159.** 120°. **160.** $\approx 0{,}64$ см. **161.** 4 дм и 2 дм.
162. 33 дм. **164.** 62°. **165.** а) 4 см; б) 12 см. **166.** $8\sqrt{2}$ см. **168.** 44°.
169. $\approx 72{,}5$ см.

170. а) Пусть нужно построить треугольник ABC с углом $A = \alpha$ и высотами $BH = h_1$ и $AF = h_2$. 1) Постройте треугольник ABC: $\angle H = 90°$, $HB = h_1$, $\angle B = 90° - \alpha$. 2) Постройте окружность с диаметром AB и найдите на ней точку F так, чтобы $AF = h_2$. 3) $BF \cap AH = C$, треугольник ABC — искомый.
б) Пусть требуется построить треугольник ABC с углом $A = \alpha$, стороной $CB = a$ и высотой $AD = h$. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, тогда центральный угол $COB = 2\alpha$. 1) Постройте треугольник CBO по стороне $CB = a$ и углам $\angle C = \angle B = 90° - \alpha$. 2) Постройте перпендикуляр к прямой CB, например $MN \perp CB$ и $MN = h$ $(M \in CB)$. 3) Найдите на окружности точку A: $AN \perp MN$; треугольник ABC — искомый.

171. Пусть AB и CD — две взаимно перпендикулярные хорды, пересекающиеся в точке K. Обозначьте $AK = a$, $BK = b$, $CK = m$, $KD = n$. Докажите, что $a^2 + b^2 + m^2 + n^2 = BF^2$, где BF — диаметр окружности. Используйте теорему Пифагора для треугольников AKC, BKD и BDF и равенство отрезков AC и DF.

172. Проведите $PE \perp AB$ $(E \in AB)$. Используя подобие треугольников ABC и APE, ABD и PBE, выразите отрезки AE и BE. Далее $AB = AE + BE$ ... .

175. а) $0{,}5\sqrt{7}$ дм; б) $1{,}2\sqrt{3}$ дм. **176.** 30°. **177.** 120°. **180.** 60°. **181.** $5\sqrt{15}$.
182. а) 106°; б) 74°. **183.** 52,5°. **184.** 32°.

185. а) 108°, 252°; б) 108°; в) $\left(136\dfrac{7}{11}\right)^{\circ}$. **186.** 9 см.

189. Докажите, что искомая хорда перпендикулярна данному радиусу.
190. а) $\sqrt{41} - 5$; б) $2\sqrt{5} - 2$.
191. а) $AB = AC = R \cdot \operatorname{ctg} 0{,}5\alpha$; б) $2R(\operatorname{ctg} 0{,}5\alpha + \cos 0{,}5\alpha)$. **192.** 12.
193. 20. (Проведите радиусы в точки касания и прямую, параллельную данной касательной, через центр меньшей окружности. Рассмотрите получившийся прямоугольный треугольник.)

194. Используйте свойство прямоугольного треугольника: катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу (треугольник ABH — прямоугольный, $HM \perp AB$).
195. 20 см. (Воспользуйтесь свойством касательных, проведенных из одной точки к окружности.)
196. Используйте решение задачи **195**.

197. $\dfrac{1}{3}R$. (Центры данных окружностей лежат на биссектрисе угла. Проведите радиусы в точки касания и прямую, параллельную указанной биссектрисе, через точку касания меньшей окружности со стороной угла.)

198. Верно. (Проведите через точку C общую касательную этих окружностей, которая пересечет отрезок AB в точке M. Тогда $MA = MC = MB$ по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки.)

201. 39 мм, 65 мм. (Центр данной окружности лежит на биссектрисе угла. Используйте ее свойство: биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам.)

202. $\dfrac{2Rr}{R+r}$. (Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, радиусы которых равны соответственно r, R и x. O_3 лежит между O_1 и O_2. Проведите радиусы в точки касания и прямую, параллельную стороне угла, через центр меньшей окружности. Получились прямоугольные подобные треугольники. Составив пропорцию, найдите x.)

203. $R\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

204. Искомая окружность является вписанной в треугольник со сторонами, лежащими на радиусах сектора и касательной к дуге сектора, проведенной через ее середину.

206. Возможны два варианта размещения точек A и B относительно окружности. 1) Рис. 177. В данном случае $AB > AK + BE > AC + BD$. 2) Рис. 178. Пусть $OA > OB$. Проведите окружность радиусом OB с центром в точке O. Она пересекает AC в точке X. $BD = XC$. Тогда $AB < AX = AC - CX = AC - BD$.

207. $\approx 51°$ и $\approx 309°$.

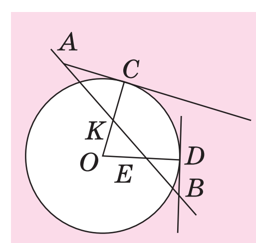


Рис. 177

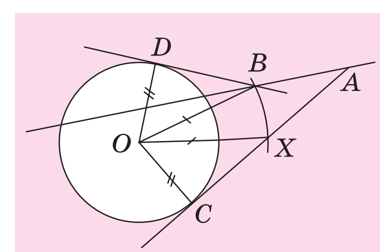


Рис. 178

210. Пусть даны две окружности на некотором расстоянии друг от друга с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r соответственно. Внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, а внутренняя — в точках C и D соответственно. Обозначьте точку пересечения этих касательных S, тогда $SD = SB = a$, $AB = d_1$, $CD = d_2$. $AS = SC$, т. е. $d_1 - a = d_2 + a$, откуда $a = \frac{d_1 - d_2}{2}$. Далее докажите, что треугольник O_1AS подобен треугольнику SBO_2, и составьте пропорцию.
211. а) 5 см; б) 18 см. **212.** $10\sqrt{3}$ см.
214. Используйте свойство высоты прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла: $h^2 = a_c \cdot b_c$, где a_c и b_c — отрезки, на которые высота делит гипотенузу.
216. 110° и 70°. **218.** Используйте свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки.
219. 120 см. **221.** Нет. **222.** Используйте формулу $\frac{a}{\sin A} = 2R$.
223. 2 см. **224.** 4 см, 5 см. **225.** 48 см, 36 см, 864 см^2. **226.** $0{,}5R$. **227.** 3.
231. а) Можно; б) нельзя; в) можно.
232. 67,5°; 80°; 112,5°; 100°. **233.** 9 см.
234. Докажите, что треугольник, образованный соединением центра окружности с концами боковой стороны, является прямоугольным. Используйте свойство высоты прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла.
236. 25 см. (Используйте метод площадей.)
237. 13 см, 14 см. (Используя формулы тригонометрии, можно найти отрезки, на которые точка касания делит сторону BC.)
238. 192 см^2. (Используйте свойство сторон прямоугольного треугольника: катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.)
239. 32 см, 24 см. (Используйте свойство диагоналей ромба и теорему о пересекающихся хордах.)
242. 10,625 см. (Проведите высоту BH и продолжите ее до пересечения с окружностью в точке E, тогда в треугольнике BCE $\angle B = 90°$, $EC = 2R$. Кроме этого, используйте теорему о пересекающихся хордах.)
243. $0{,}5\sqrt{3}$ см. **244.** 20 см^2. **245.** 0,75 см. **246.** $\sqrt{2}$ см.
247. $\frac{2R\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. **248.** $\frac{(a-r)^2}{2(a-2r)}$. **249.** 2.
250. а) Не может. (Предположив, что $R = 3$, и используя свойство $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, найдите сумму синусов углов треугольника.) б) Не может.

251. а) При постоянном периметре наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник. Значит, $S_{\text{наиб.}} = 25\sqrt{3}$, а если предположить, что $r = 5$, то $S = 75$, что невозможно. б) Не может.
252. $m \cdot n$. (Выразите площадь данного треугольника двумя способами: 1) как сумму площадей двух пар прямоугольных треугольников с катетами r, m и r, n и квадрата со стороной, равной r; 2) как половину произведения катетов, равных $r + n$ и $r + m$. Сравните полученные равенства.)
253. Длины сторон искомого треугольника можно найти как четвертый пропорциональный отрезок из пропорции $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{R_1}{R}$. Или используйте преобразование подобия — гомотетию с центром гомотетии в центре данной окружности.
255. Проведите произвольную хорду $B'D'$ через точку M (рис. 179). Тогда $S_{AB'CD'} = 4\,S_{B'OD'}$ (докажите это, используя свойство медиан $B'O$ и $D'O$ треугольников $AB'C$ и $AD'C$, $B'M$ и $D'M$ треугольников $OB'C$ и $OD'C$), следовательно, площадь исследуемого четырехугольника будет наибольшей, если наибольшая площадь треугольника $B'OD'$. Далее заключаем, что угол BOD — тупой и меньше тупого угла $B'OD'$ ($BD \perp AC$). Треугольник BOD имеет наибольшую площадь из всех треугольников $B'OD'$, так как $S_{BOD} = 0{,}5R^2 \sin\angle BOD > S_{B'OD'} = 0{,}5R^2 \sin\angle B'OD'$, учитывая, что синус меньшего из тупых углов больший.

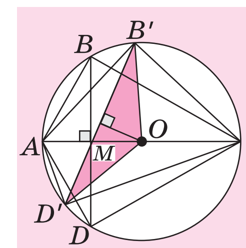


Рис. 179

256. $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$. **257.** $\frac{ab}{a+b}$.
258. а) $\frac{a+b}{4}\left(\sqrt{4R^2-a^2} \pm \sqrt{4R^2-b^2}\right)$, где $a < b$; б) $\frac{ab\sin\alpha}{(b-a)(1+\cos\alpha)}$. (Используйте свойство описанного четырехугольника, теорему косинусов для треугольника со сторонами, равными боковым сторонам трапеции, и углом α, метод площадей для указанного треугольника.)
259. $(R + r) + \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}$, $(R + r) - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}$.
261. Выразите площадь вписанного четырехугольника через длины диагоналей и синус угла между ними.
262. 7 см. (Используйте свойство (см. задание **218**): $a + b = 2r + 2R$, где a, b — катеты прямоугольного треугольника, r, R — радиусы вписанной и описанной окружностей.)
263. а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **266.** а) 35° или 145°; б) 150° или 210°.
267. а) 30° или 150°; б) 50° или 130°.

268. а) 96 см^2; б) 54 см^2. (Используйте свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, и теорему Пифагора.)
269. а) $50\sqrt{3}$ см^2; б) 120 см^2. **270.** а) 4,5 см; б) 9,375 см.
271. а) 3 см; б) 6,25 см. **272.** 20 см. **273.** 8 см. **274.** 10 см, 4 см.
275. Пусть CA и CB — две касательные, проведенные к окружности из точки C. D — произвольная точка окружности, DH — расстояние от этой точки до хорды AB, DF и DE — расстояния от точки D до касательных CA и CB соответственно. Докажите, что треугольник DAH подобен треугольнику DBE и треугольник DAF подобен треугольнику DBH. Отсюда следует, что $DH^2 = DF \cdot DE$.
276. Используйте свойство касательных.
277. $8\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **281.** $\sqrt{R^2+S}-R$. **282.** 45° или 135°.
283. Ортоцентр треугольника — это точка пересечения его высот. Учитывая, что AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы вписанных углов, обозначьте градусные меры равных дуг, например: $\cup BA_1 = \cup A_1C = \alpha$, $\cup AC_1 = \cup C_1B = \beta$, $\cup B_1C = \cup AB_1 = \gamma$. Для доказательства того, что AA_1 и BB_1 — высоты треугольника $A_1B_1C_1$, используйте способ вычисления угла между пересекающимися хордами (см. § 3, задание **1**).
284. Используйте свойство высот треугольника ABD. AC и BC — прямые, на которых лежат две высоты треугольника ABD. Осталось найти положение точки D. $CD \perp AB$. Исследуйте два положения точки C — внутри круга и за его границей.
285. а) Квадрат; б) ромб **286.** а) Верно; б) нет. **287.** а) Неверно; б) верно.
288. $a = \dfrac{180(n-2)}{n}$. **289.** а) 9; б) 10; в) 12; г) 18.

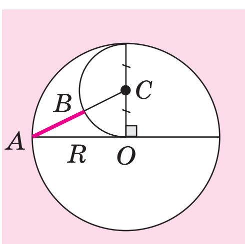


Рис. 180

290. в) Можно использовать правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса R. Докажите, что его сторона равна $\dfrac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$. На рисунке 180 показан способ построения такого отрезка AB.
294. 576 см^2. **295.** $192\sqrt{3}$ см^2. **296.** $\left(128\dfrac{4}{7}\right)^\circ$.
297. $\left(1+\sqrt{5}\right)$ дм. (Используйте подобие треугольников AOB и EAB и то, что отрезки OE и AE равны.)
298. 36°. **299.** 11. **301.** 18 см. (Используйте метод площадей.)
302. Не существует. **303.** Нельзя.
304. a, $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
305. $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $8\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $8\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.
307. $\dfrac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$. **308.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **309.** $9\sqrt{3}$. **310.** $21\sqrt{3}$ см.

311. $0{,}5\sqrt{2}$. **312.** 15. **313.** В 2 раза. **315.** $\dfrac{32\sqrt{6}}{3}$ см.
316. $2\dfrac{2}{3}$. (Используйте подобие треугольников и свойство медиан.)
317. $\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$ см. **318.** $\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$. **319.** а) $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ см^2; б) $32(\sqrt{2}+1)$ см^2.
320. а) ≈ 97 см^2; б) $160\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ см^2. **322.** $31{,}5\sqrt{2}$ мм. **323.** $\dfrac{2}{3}$ см^2.
326. Равносторонними треугольниками, квадратами или правильными шестиугольниками.
328. $\dfrac{3\sqrt{3}\,b^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{4}$. **329.** $d_1 \cdot d_2$. **330.** $\dfrac{8\sqrt{3}-9}{4}R^2$. **331.** $S_5 = \dfrac{5a^2}{4\,\mathrm{tg}\,36^\circ}$.
336. ≈ 3713 см^2. **337.** ≈ 52 см.
338. Увеличилась примерно на 31,4 см.
339. На 125 %. **340.** ≈ 18,9 см^2. **341.** $C \approx 31{,}4$; $S \approx 78{,}5$.
342. ≈ 28,3 см^2.
343. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2+r^2 \pm \sqrt{6R^2r^2-R^4-r^4}}$, если $1 < \dfrac{R}{r} < 1+\sqrt{2}$, и единственное решение $\sqrt{\dfrac{R^2+r^2}{2}}$, если $\dfrac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$.
344. ≈ 14,3 м^2. **345.** ≈ 37,7 см^2. **346.** а) 5 : 7; б) $(5\pi-3):(7\pi+3)$.
347. $\dfrac{a^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)}{8}$. **349.** $\dfrac{a^2\left(9\sqrt{3}-4\pi\right)}{6}$. **350.** $\dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$.
351. 10 дм. **352.** ≈ 32. **353.** ≈ 24,3 см^2. **354.** ≈ 7,4 дм^2. **356.** $\dfrac{6-\pi}{8}c^2$.
357. 30°, 150°, 150°, 30°. **358.** а) ≈ 2,8 см; б) 8 см^2.
359. $2\sqrt{3}$ см и 2 см. **360.** $40(2-\sqrt{2})$ см. **362.** ≈ 68,8°.
363. ≈ 8,37 см. **364.** ≈ 25 см. **365.** $C \approx 157$ см, $S = 1963{,}5$ см^2.
366. ≈ 112 км. **367.** Примерно $\dfrac{1}{5}$ часть листа.
368. $2{,}5\sqrt{2}$ см. **369.** $\dfrac{4}{\pi\sin\alpha}$.
370. $r+R+\sqrt{R^2-2Rr-r^2}$; $r+R-\sqrt{R^2-2Rr-r^2}$.
371. $\pi\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)$. **372.** $0{,}25\pi\alpha^2$.
373. $m+R-\sqrt{R(R+2m)}$. (Продлите высоту BD до пересечения с окружностью в точке M, тогда треугольник BAM — прямоугольный, подобный треугольнику BDA. Обозначив $BD = x$, $AB = m - x$, $BM = 2R$, составьте пропорцию и решите уравнение относительно x.)

374. $R = 2$. **375.** $S_\triangle = \left(2\sqrt{3}\ - 3\right) a^2$.
376. Можно A_1A_2, A_1A_4 и r выразить через R — радиус описанной окружности и доказать, что данное равенство верно.
378. 1) $S \approx 358$ см^2, $V \approx 396$ см^3; 2) $S \approx 4863$ см^2, $V \approx 25\,447$ см^3 ($\pi \approx 3{,}1416$).
379. $\frac{c^2h}{4\pi}$. **380.** 1) ≈ 573 м^3; 2) ≈ 269 м^3.
381. $V_1 = 360\pi$ (см^3), $V_2 = 600\pi$ (см^3), $V_3 = 512\pi$ (см^3).
386. 1) $S \approx 2{,}5$ дм^2, $V \approx 259$ см^3; 2) $S \approx 919$ см^2, $V \approx 1309$ см^3; 3) $S \approx 20{,}4$ дм^2, $V \approx 5{,}7$ дм^3.
387. $V \approx 16{,}7$ дм^3, $S \approx 40{,}6$ дм^2. **389.** $\approx 2{,}6$ м^3.
391. 2) а) $S \approx 201$ см^2, $V \approx 268$ см^3; б) $S \approx 78{,}5$ см^2, $V \approx 65{,}4$ см^3; в) $S \approx 35{,}47$ см^2, $V \approx 19{,}9$ см^3; г) $S \approx 12{,}6$ дм^2, $V \approx 4{,}2$ дм^3.
392. 1) $S \approx 78{,}5$ дм^2, $V \approx 65{,}4$ дм^3; 2) $S \approx 201$ м^2, $V \approx 268$ м^3.
393. 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{64}$.
394. $2(ac + bc) + \pi hb$.
395. Примените теорему Пифагора для треугольника OBA, где $OA = R$, $OB = R - h$, $BA = 0{,}5l$.
396. $\approx 6{,}28$ см. **397.** $\approx 5{,}23$ см. **399.** а) $\approx 0{,}48$ м; б) $\approx 0{,}7$ м.
400. а) ≈ 616 см^2; б) $\approx 1{,}99$ дм^2. **401.** ≈ 930 м.
402. а) $\approx 5{,}65$ м; б) $\approx 45{,}2$ м.
403. а) $\approx 3{,}02$ м^2; б) $\approx 85{,}7$ см.
404. Длина окружности меньше периметра квадрата.
405. Площадь квадрата больше площади круга. **406.** $0{,}25\pi c^2$.
407. $a = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, где n — количество сторон многоугольника или $\alpha = \pm k \cdot \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, где $k \in \boldsymbol{N}$.
408. $0{,}75p$. **409.** $R^2(\pi - \alpha + \sin\alpha)$.
410. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. (Искомая площадь может быть найдена как разность между площадью данного треугольника и площадью части круга без трех сегментов, находящихся вне треугольника.)
411. $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{72} b^2$. **422.** $90°$. **426.** 2 дм. **427.** $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$.
428. Используйте свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
441. 2400 см^2. **442.** $\sqrt{\frac{Qm^2 + Qn^2}{2mn}}$. **444.** а) Можно; б) нет.

445. Можно. **446.** 2,5 дм. **447.** 30 мм. **449.** а) 24 дм^2. **451.** $\approx 6{,}28$ дм.
452. $0{,}5\sqrt{15}$ см^2.
453. Используя формулу $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, найдем сторону параллелограмма — 7 см, тогда $\cos\alpha = \frac{2}{7} = 0{,}(285714)$.
454. $\approx 184{,}9$ см. **455.** $\approx 20{,}1$ см^2. **456.** а) 8 м^2; б) $\approx 12{,}4$ м^2. **457.** $\approx 31{,}4$ см.
460. 1,5. **461.** $0{,}5\sqrt{5}$ см. **466.** 108.
470. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} a$. (Используйте свойство равнобедренного треугольника с углом 36° при вершине. Докажите, что $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.)
473. 4 см. **474.** $\approx 28{,}7°$. **475.** $\frac{(n^2 + m^2)\sqrt{n^2 + m^2}}{mn}$.
476. $\frac{(m+n)(mn + a(m+n))}{mn}$. **477.** 4096 см^3. **478.** ≈ 14 дм.
479. $\approx 81°$. **480.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **481.** $a - 2m$. **482.** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$. **484.** 4.
485. 30°, 60°, 90°. **487.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **488.** ≈ 17 %. **489.** 360 дм^2.
491. ≈ 204 см^2. **492.** $S = \frac{\sqrt{2}}{4} d^3 + d^2 - 4\sqrt{2d}$; $V = \frac{1}{16} d^4 - d^2$.
493. Например, BAA_1D_1D; $BA_1D_1C_1B_1$; BDD_1C_1C.
495. 288 см^2. **496.** $\approx 40{,}4$ м^2.
498. $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.
502. Пусть дан треугольник ABC, $\angle C = 90°$. Центры квадратов, построенных на катетах, — O_1, O_2. $O_1O_2 = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$ (где a, b — катеты треугольника ABC). Центр квадрата, построенного на гипотенузе, обозначим буквой O. Рассмотрим треугольник AOC. $\cos\angle AOC = \cos(\alpha + 45°) = \frac{(b-a)\sqrt{2}}{2c}$ ($\alpha = \angle BAC$). Далее, применяя теорему косинусов, найдем OC.
505. Площадь сектора наибольшая, если радиус круга, содержащего данный сектор, равен $\frac{p}{4}$ (p — данный периметр сектора).
506. 4 дм или 5 дм. **507.** Используйте метод площадей.

508. $0 < h \leqslant \frac{a+b}{2}$. (Используйте свойство: в прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, меньше или равна половине основания.) **510.** $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Домашние контрольные работы

Алгебра

Глава I

Вариант 1

1. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.
2. а) $(-\infty; -2{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$; б) $(-7; 7)$; в) $(-\infty; -3] \cup [1; 10]$;
г) $(-\infty; -17{,}9) \cup (-6{,}9; +\infty)$.
3. $(-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$. **4.** 5 м.
5. $\left(-\infty; -5\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

Вариант 2

2. Надо уменьшить каждую сторону квадрата на 1 см или на число, меньшее 1 см.
3. $[-3; 0{,}5]$. **4.** а) $(-\infty; -3] \cup 2$; б) $(-2; -1)$; в) $(-1; 3]$; г) $[5; 11]$.
5. При $0 < a < 16$.

Глава II

Вариант 1

2. $(1; 5)$. **3.** а) $(0; 0{,}7]$; б) нет решений.
4. а) 2; 3; 4; б) -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4. **5.** 47.

Вариант 2

2. Нет. **3.** а) $[-10; -2)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$. **4.** а) $\left[-1\frac{2}{3}; 4\frac{1}{3}\right]$; б) $\left[1+\sqrt{5}; 4\right]$.

5. Не менее 60 км/ч.

Глава III

Вариант 1

1. а) 5, 15, 25, 35, 45, ...; б) 5, 15, 45, 135, 405, ...
2. а) $d = -1{,}3$; б) $q = \pm 0{,}5$. **3.** 407. **4.** Докажите, что $(c_n)^2 = c_{n-1} \cdot c_{n+1}$; $c_1 = 2$, $S_4 = 518$. **5.** 2; 6; 10 или 11; 6; 1.

Вариант 2

1. $\sqrt[3]{-27} = 3$; $\sqrt[4]{16} = 2$. **2.** 0,5. **3.** 65. **4.** 22. **5.** $96\sqrt{3}$ см^2.

Геометрия

Глава I

Вариант 1

2. 1. **4.** $\sqrt{13}$ см или $\sqrt{37}$ см. **5.** 75 см^2.

Вариант 2

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ дм^2. **2.** $4\sqrt{10}$ см. **3.** $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ см. **4.** $\frac{a^2}{4}$. **5.** $S = \frac{c^2(p^2-1)}{4}$.

Глава II

Вариант 1

1. 35°. **2.** 5 см. **3.** $4\sqrt{6}$ см. **4.** 28,125 см. **5.** 2 дм, 1 дм.

Вариант 2

1. 140°, 180°, 20°. **3.** 15. **4.** 16 см. **5.** $\sqrt{R^2+S} - R$.

Глава III

Вариант 1

1. 6 см. **3.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см, $8\sqrt{3}$ см^2. **4.** $\approx 4{,}48$ см^2. **5.** $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 2

1. $\approx 12{,}6$ см. **3.** Шестиугольник и девятиугольник.
4. ≈ 497 см^2. **5.** $\frac{5\sqrt{15}}{3}$; $\frac{10\sqrt{15}}{3}$.

Примерные годовые контрольные работы для самопроверки

Вариант 1

1. $7 \cdot 3{,}5 - 23 > 0$. **2.** -22. **3.** $98\sqrt{2}$ см^2. **4.** $(\infty; 0]$. **5.** 50°.
6. 28 см. **7.** ± 3, ± 7. **8.** $161\frac{7}{13}$.

Вариант 2

1. $q = 2$, $a_5 = 48$. **2.** 2. **3.** 24 дм, 10 дм.
4. $(-\infty; 0{,}5) \cup (3; +\infty)$. **5.** $x^2 + (y-6)^2 = 52$.
6. На 12 минут. **7.** $p = -12$, $q = 12$. **8.** $\frac{27\sqrt{3}}{7}$.

Вариант 3

1. 0; 1. **2.** 3 км/ч, 20,5 км/ч. **3.** $40\sqrt{3}$ см^2.
4. Верно. **6.** $[-7; 2)$. **7.** $\frac{728}{2187}$. **8.** 6 см, 12 см.

Вариант 4

1. 18 см и 30 см. **2.** 3. **3.** $(-\infty; 0{,}5] \cup (2; +\infty)$.
4. $27\sqrt{3}$ см^2. **5.** $-0{,}18$. **7.** 83. **8.** $\approx 4{,}2$ см.

Вариант 5

1. Является четной. **2.** $(1{,}5; 8]$. **3.** 148°, 32°, 148°, 32°.
4. 8 дет. и 6 дет. **5.** -39. **6.** $\frac{625\pi}{16}$ см^2. **7.** Верно.

Вариант 6

2. $(-3; 16)$. **3.** 68°. **4.** 32 дм и 15 дм.
6. 12,6 см и 22,4 см. **7.** 1.

Вариант 7

1. 130 км. **2.** 14. **3.** 15 см. **4.** $(-2; -1)$, $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $(2; 1)$.
6. С 5 % содержанием никеля не менее 20 кг, но не более 40 кг лома, с 40 % содержанием никеля не менее 100 кг, но не более 120 кг лома.
8. $0{,}9\sqrt{5}$.

Вариант 8

1. 77. **2.** $x + 1$. **3.** 12 дм^2. **4.** Является нечетной. **6.** Первой.
7. 7,5 см. **8.** $(-1; 1)$, $(0; 0)$.

Вариант 9

2. $\pm\frac{4}{9}$. **3.** $\frac{12}{13}$. **4.** $\left(-\frac{1}{4}; 0\right]$. **5.** 5 дм. **6.** 2. **8.** $\frac{d + \sqrt{d^2 + t^2b^2}}{t}$ км/ч.

Вариант 10

3. 48 см. **5.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **6.** 12 г. **7.** $\frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 6}{4}$.
8. $\sqrt{R^2 + S} - R$.

Предметный указатель

Алгебра

Геометрия

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Солтан Геннадий Николаевич
Солтан Алла Евгеньевна

МАТЕМАТИКА
Алгебра и геометрия

Учебное пособие для 10 класса
учреждений, обеспечивающих получение
общего среднего образования,
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. А. Тимофеева*. Обложка *Л. А. Мурашко*. Художественный редактор *Л. В. Павленко*. Технический редактор *Е. В. Прудывус*. Корректоры *Т. Н. Ведерникова, О. С. Козицкая, Д. Р. Лосик, З. Н. Гришели, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 19.06.2006. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 19 + 0,25 форз. Усл. кр.-отт. 39. Уч.-изд. л. 12,47 + 0,18 форз. Тираж 5031 экз. Заказ 1688.

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.
220004, Минск, проспект Победителей, 11.

ОАО «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа». 220600, Минск, Красная, 23.